# Inhaltsverzeichnis

## TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Analysis

**1.** Der Graph einer ganzrationalen Funktion $p$ zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$ besitzt den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie einen Funktionsterm $p(x)$ von $p$ und geben Sie die Wertemenge von $p$ an. **(4BE)**

Lösung S.14 Video

**2.0** Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto x^5 - 4x^3$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

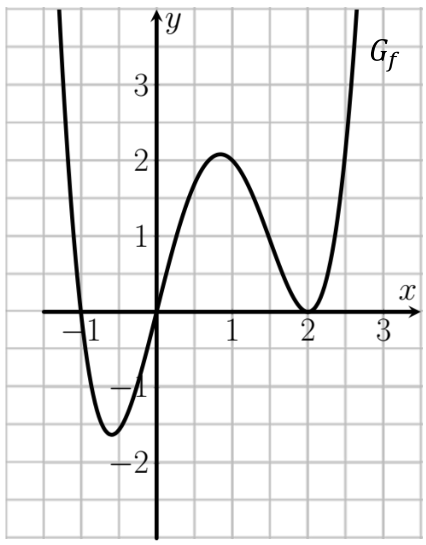
**2.1** Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $k$ und geben Sie ihre jeweilige Vielfachheit an. **(4BE)**

Lösung S.14 Video

**2.2** Geben Sie einen Wert für $b$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $b \neq -1$ an, so dass gilt: $\int_{-1}^{b} k(x)\,dx = 0$. Begründen Sie Ihre Wahl. **(3BE)**

Lösung S.15 Video

**3.0** Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_f$ einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion $f$ vierten Grades. Die Funktion $F$ bezeichne eine Stammfunktion von $f$.




**3.1** Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.
Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt $+1$ BE. Jedes falsch gesetzte $-0{,}5$ BE und jedes nicht gesetzte $0$ BE bewertet. **(4BE)**

| Aussage | w | f | n. e. |
|---|---|---|---|
| $f''(-1) > 0$ | | | |
| $f'(2) = f(2)$ | | | |
| Die lokale Änderungsrate der Funktion $f$ an der Stelle $x = -0{,}5$ ist negativ. | | | |
| $F$ hat genau drei Nullstellen. | | | |

Lösung S.16 Video

**3.2** Skizzieren Sie in das gegebene Koordinatensystem von 3.0 einen möglichen Graphen der Stammfunktion $F$, welcher durch den Koordinatenursprung verläuft. Aus Ihrer Skizze sollen – sofern vorhanden – Extrem- und Wendestellen des Graphen von $F$ klar ersichtlich sein. **(3BE)**

Lösung S.17 Video

**4.0** Gegeben ist die Funktion $h$ mit der Funktionsgleichung $h(x) = x \cdot e^{x-2}$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente $G_t$ an den Graphen der Funktion $h$ an der Stelle $x = 2$. **(4BE)**

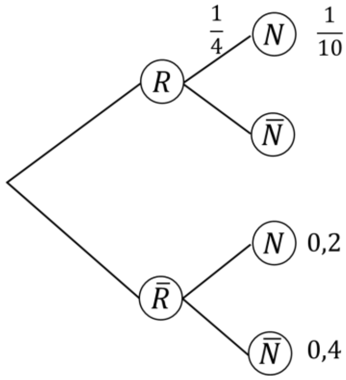
Lösung S.18 Video

$\sum \mathbf{22}$

## TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Stochastik

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

**1.** Bei einem Online-Müsliversand kann man sich je nach persönlichem Geschmack aus verschiedenen Zutaten ein eigenes Müsli zusammenstellen. Erfahrungsgemäß unterscheiden sich die Geschmäcker der Kunden insbesondere bei Rosinen ($R$) und Nüssen ($N$) stark. Das Wahlverhalten eines zufällig ausgewählten Kunden hinsichtlich dieser beiden Zutaten in einer Müslimischung wird als Zufallsexperiment betrachtet (siehe Baumdiagramm).




**1.1** Beschreiben Sie in Worten die im Baumdiagramm angegebene Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ im vor vorliegenden Sachzusammenhang. **(1BE)**

Lösung S.19 | Video

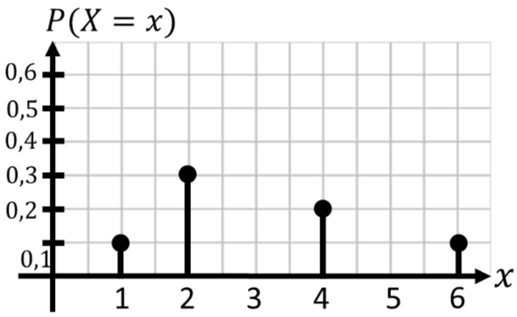
**1.2** Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Kunde für Nüsse oder Rosinen entscheidet. **(2BE)**

Lösung S.19 | Video

**1.3** Untersuchen Sie mithilfe geeigneter Berechnungen, ob die Ereignisse $R$ und $N$ stochastisch unabhängig sind. **(4BE)**

Lösung S.20 | Video

**2.0** Bei einem Zufallsexperiment wird ein gezinkter Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 einmal geworfen. Die Zufallsgröße $X$ gibt die gewürfelte Augenzahl an. Die unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ gibt die gewürfelte Augenzahl an. Die unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ ist in folgendem Stabdiagramm dargestellt.
Es gilt: $P(X \leq 3) = 0{,}5$.




**2.1** Ermitteln Sie jeweils nachvollziehbar die Wahrscheinlichkeit, mit dem vorliegenden Würfel eine 3 zu würfeln, sowie die Wahrscheinlichkeit, mit dem vorliegenden Würfel eine 5 zu würfeln. Vervollständigen Sie damit das Diagramm.
[ Teilergebnis: $P(X = 5) = 0{,}2$ ] **(3BE)**

Lösung S.20 Video

**2.2** Der gezinkte Würfel soll in einem Gewinnspiel eingesetzt werden, bei dem er einmal geworfen wird und die gewürfelte Augenzahl die Auszahlung pro Spiel in Euro angibt. Bestimmen Sie, welcher Einsatz pro Spiel verlangt werden muss, damit das Spiel fair ist.
**(2BE)**

Lösung S.21 Video

$\sum 12$

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I

**1.0** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{14}(x^3 - 12x^2 + 36x + 49)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion $f$ in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit $G_f$ bezeichnet.

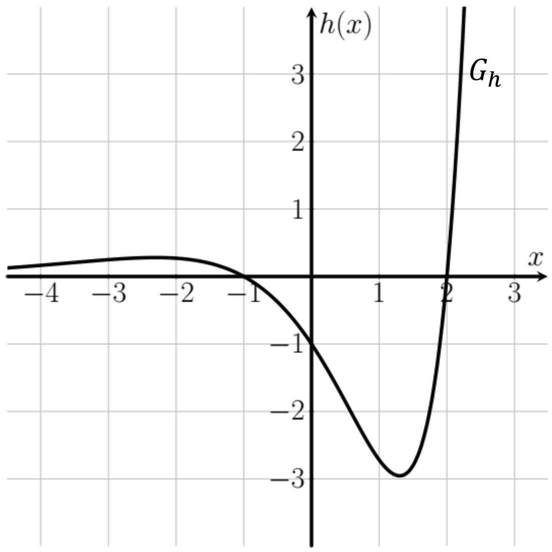
**1.1** Untersuchen Sie die Funktion $f$ auf Nullstellen. **(4BE)** Lösung S.22 Video

**1.2** Ermitteln Sie jeweils die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von $G_f$. **(5BE)** Lösung S.23 Video

**1.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen $G_f$ für $-1 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1\ cm$ **(4BE)** Lösung S.24 Video

**1.4** Der Graph der Funktion $f$ und die Gerade mit der Gleichung $x = 6$ schließen zusammen mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **(4BE)** Lösung S.25 Video

**2.0** Gegeben ist ein Ausschnitt des Graphen $G_h$ der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h$ mit der Funktionsgleichung $h(x) = (\ ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen $G_h$ mit den Koordinatenachsen haben ganzzahlige Werte und können der Abbildung entnommen werden.




**2.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter $a$, $b$ und $c$. **(6BE)** Lösung S.26 Video

**2.2** Die Funktion $H$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $h$. Deuten Sie $|H(2) - H(0)| \approx 4{,}19$ geometrisch in Bezug auf $G_h$. **(2BE)** Lösung S.27 Video

**3.0** Die Population eines bestimmten Bienenvolkes von Beginn des Monats März bis Ende Oktober kann näherungsweise durch die Funktion $N$ mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0{,}125 \cdot t - 0{,}2} + 5$ mit $t \in [0; 35]$ modelliert werden. Ab Ende Oktober verändert sich die Anzahl der Bienen in diesem Volk nach anderen Gesetzmäßigkeiten und soll im Folgenden nicht weiter betrachtet werden. Die Variable $t$ im Funktionsterm steht für die seit Beobachtungsbeginn Anfang März ( $t_0 = 0$ ) vergangene Zeit in Wochen. Der Funktionswert von $N$ gibt die Anzahl der Bienen in Tausend zum Zeitpunkt $t$ an. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

**3.1** Geben Sie die Anzahl der Bienen zu Beobachtungsbeginn an und berechnen Sie, wie viele Bienen das Volk fünf Wochen nach Beobachtungsbeginn zählt. **(3BE)**

Lösung S.27 Video

**3.2** Ermitteln Sie, nach wie vielen Wochen die Anzahl der Bienen im Beobachtungszeitraum das absolute Maximum erreicht hat und berechnen Sie diese maximale Bienenanzahl.
[ mögliches Teilergebnis: $\dot{N}(t) = e^{-0{,}125 \cdot t - 0{,}2}(-0{,}25t^2 + 4t)$ ] **(8BE)**

Lösung S.28 Video

**3.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion $N$ im angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in welchem die Anzahl der Bienen im Volk erstmals $50000$ beträgt.
Maßstab: 4 Wochen ≙ 1 cm; 10000 Bienen ≙ 1 cm **(5BE)**

Lösung S.29 Video

**3.4** An der Stelle $t_W \approx 4{,}7$ ändert der Graph der Funktion $N$ sein Krümmungsverhalten von einer Links- in eine Rechtskrümmung. Weiterhin gilt $\dot{N}(t_W) \approx 6{,}04$ . Interpretieren Sie die beiden Werte im Sachzusammenhang. **(2BE)**

Lösung S.30 Video

$\sum 43$

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II

**1.** Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f$ mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion $f$ in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit $G_f$ bezeichnet.

**1.1.** Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von $f$ für $x \to \pm\infty$ an. **(2BE)**

Lösung S.31

**1.2** Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der Punkte von $G_f$ mit waagrechter Tangente. **(8BE)**

Lösung S.32

**1.3** Zeigen Sie, dass die Gerade $G_g$ mit $g(x) = -x + \frac{5}{8}$ und $D_g = \mathbb{R}$ durch die beiden Wendepunkte von $G_f$ verläuft. **(6BE)**

Lösung S.34

**1.4** Zeichnen Sie $G_f$ und $G_g$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte für $-3 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 2cm$ **(5BE)**

Lösung S.35

**1.5** Die Gerade $G_g$ schließt mit $G_f$ im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **(5BE)**

Lösung S.36

**2.0** Die Körpertemperatur einer an einem grippalen Infekt erkrankten Person kann vereinfacht durch die Modellfunktion $T$ mit der Funktionsgleichung

$T(t) = 36{,}5 + 2t \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$

beschrieben werden. Dabei steht die Variable $t$ für die Zeit in Tagen ab Auftreten der ersten Symptome zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und $T(t)$ für die Körpertemperatur in $°C$ zum Zeitpunkt $t$.
Auf das Mitführen von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

**2.1** Untersuchen Sie, welche Temperatur sich nach diesem Modell theoretische langfristig einstellt. **(4BE)**

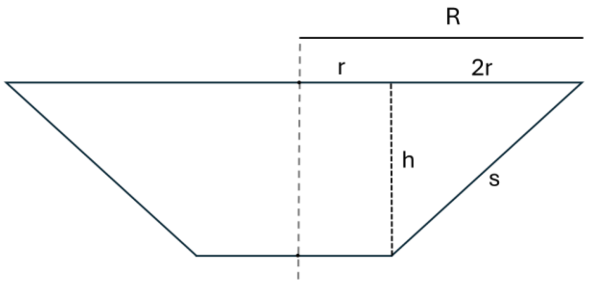
Lösung S.37

**2.2** Ermitteln Sie rechnerisch, welche maximale Körpertemperatur die erkrankte Person nach diesem Modell erreicht. **(6BE)**

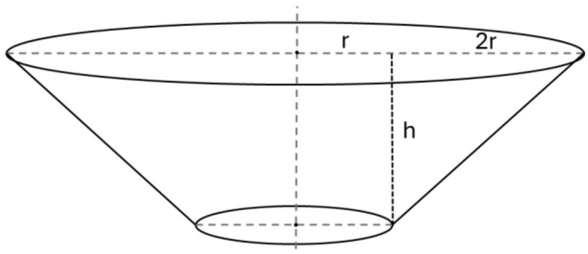
Lösung S.38

[ Mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \cdot (1 - 0{,}25t)$ ]

**3.0** Ein Pflanzgefäß hat die Form eines umgedrehten geraden Kreiskegelstumpfes, dessen Querschnittsfläche ein Trapez ist (siehe nachfolgende nicht maßstabsgetreue Skizzen). Der obere Kreisradius $R$ ist dreimal so groß wie der untere Kreisradius $r$. Die Länge der Seitenkante $s$ beträgt 25 $cm$. Vorgaben der Produktion legen fest, dass die Höhe $h$ des Pflanzengefäßes mindestens 15 $cm$ und höchstens 23 $cm$ beträgt.
Die Dicke der „Wände" darf bei den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



Querschnitt



Räumliche Ansicht

Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass für das Volumen dieses geraden Kreiskegelstumpfes gilt:

$$V(r;h) = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

**3.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen des Pflanzgefäßes in Abhängigkeit von der Höhe $h$ gilt:
$V(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi \cdot (625h - h^3)$ **(3BE)**

Lösung S.39

**3.2** Bestimmen Sie den Wert für die Höhe $h$ des Pflanzgefäßes so, dass das Volumen des Pflanzgefäßes maximal ist. Berechnen Sie das maximale Volumen sowie den dazugehörigen oberen Durchmesser des Pflanzengefäßes. **(6BE)**

Lösung S.40

$\sum$**43**

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.
Auf einem Volksfest bieten Schausteller unter anderem verschiedene Spielgeschäfte an.

**1.0** Bei der Losbude „Crazy Cat" kann man Lose ziehen und es gilt

20% der Lose sind Gewinnlose.

Das Ziehen der Lose aus der großen Lostrommel, in der sich sehr viele Lose befinden, wird als Zufallsexperiment betrachtet. Die Gewinnwahrscheinlichkeit kann dabei über die einzelnen Züge hinweg näherungsweise als konstant angenommen werden.

**1.1.** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
$E_1$ : „Unter 25 gezogenen Losen sind höchstens drei Gewinnlose."
$E_2$ : „Unter 30 gezogenen Losen sind mehr Gewinnlose als zu erwarten wären." **(4BE)**

Lösung S.41

**1.2.** Nun werden 10 Lose nacheinander gezogen und jedes Los wird direkt nach dem Ziehen geöffnet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

$E_3$ : „Es werden genau drei Gewinnlose gezogen und diese folgen nacheinander." **(2BE)**

Lösung S.42

**1.3** Ermitteln Sie, wie viele Lose mindestens gezogen werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein gezogenes Gewinnlos mindestens 95% beträgt. **(4BE)**

Lösung S.42

**1.4** Die Losbude „Happy End" verspricht eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit als die 20% der Losbude „Crazy Cat" (Gegenhypothese). Ob dieses Versprechen zutrifft, soll mithilfe eines Hypothesentests untersucht werden, indem 50 Lose von „Happy End" gekauft und geöffnet werden.

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese auf dem 5%-Signifikanzniveau. **(5BE)**

Lösung S.43

**2.0** Beim Glücksspielgeschäft „Münzen Magic“ kann man für einen Einsatz von 3€ an einem Glücksspiel teilnehmen. Dabei wird eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen ($W$) und Zahl ($Z$) bis zu fünf Mal nacheinander geworfen. Erscheint beim ersten Wurf Zahl, endet das Spiel sofort. Das Spiel wird ebenso beendet, wenn in zwei aufeinanderfolgenden Würfen das gleiche Symbol erscheint. Spätestens nach fünft Würfen endet das Spiel.

**2.1** Bestimmen Sie für das vorliegende Zufallsexperiment mithilfe eines Baumdiagramms einen geeigneten Ergebnisraum. **(4BE)**

Lösung S.44

**2.2** Erscheint zweimal nacheinander Wappen, so werden 4€ ausbezahlt. Wenn zweimal nacheinander Zahl erscheint, werden 8€ ausbezahlt. In allen anderen Fällen wird nichts ausbezahlt. Die Zufallsgröße $X$ gibt die Höhe der Auszahlung pro Spiel in Euro an.

Erstellen Sie eine vollständige tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße $X$ und bestimmen Sie, um wie viel man den Einsatz von 3€ pro Spiel erhöhen bzw. verringern müsste, damit es sich um ein faires Spiel handelt. **(4BE)**

Lösung S.44

$\sum \mathbf{23}$

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

**1.** In einer In einer Kleinstadt lebte im Jahr 2022 in 48 % aller Haushalte mindestens ein Heimtier (H). 41 % aller Haushalte dieser Kleinstadt waren Einpersonenhaushalte, sogenannte Singlehaushalte (S). In 34 % aller Singlehaushalte dieser Kleinstadt lebte mindestens ein Heimtier.
Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und berechnen Sie den Anteil der Singlehaushalte ohne Heimtier unter allen Haushalten. **(4BE)**

Lösung S.45

**2.** Hunde sind nach Katzen die beliebtesten Heimtiere. Danach folgen sogenannte Kleintiere, wie z. B. Kaninchen oder Hamster. Kleintiere werden in 4 % aller Haushalte gehalten. Zudem besitzen 12 % aller Haushalte mindestens zwei verschiedene Heimtierarten. Bei einer Umfrage werden die Bewohner von 50 zufällig ausgewählten Haushalten einer Kleinstadt befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$E_1$ : „In genau fünf der Haushalte leben Kleintiere.“

$E_2$ : „In mindestens einem der Haushalte leben mindestens zwei verschiedene Heimtierarten.“ **(3BE)**

Lösung S.46

**3.** Im Jahr 2022 kauften 80 % der Heimtierhalter ihren Heimtierbedarf (Fertignahrung, Bedarfsartikel und Zubehör) im stationären Handel, also in einem Geschäft vor Ort. Da dieser Anteil im Vergleich zum Vorjahr weitgehend konstant geblieben ist, möchte ein stationärer Händler für Heimtierbedarf auf die Möglichkeit des zusätzlichen Onlinehandels verzichten. Sein Berater rät ihm allerdings dazu, seine Produkte zunehmend auch online zu vertreiben, da er behauptet, dass die Marktanteile des stationären Handels zugunsten des Onlinehandels schrumpfen werden (Gegenhypothese).
Um eine Entscheidung zu treffen, befragt der Händler 200 zufällig ausgewählte Kunden, ob sie weiterhin stationär bei ihm einkaufen oder in Zukunft lieber online bestellen möchten.
Entwickeln Sie für den Händler für Heimtierbedarf einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5 % und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 152 seiner Kunden angeben, weiterhin stationär bei ihm einkaufen zu wollen. **(5BE)**

Lösung S.47

**4.0** Um ihr Angebot kontinuierlich an die Nachfrage anzupassen, hat die Besitzerin eines Hundesalons die Zusammensetzung ihres vierbeinigen Kundenstamms und die Wahl von Pflegeleistungen über einen längeren Zeitraum analysiert. Sie unterscheidet zwischen Hunden, die pflegeintensiv (I) sind, da sie z. B. ein langes Fell haben oder größer als 60 cm sind, und weniger pflegeintensiven Hunden. Sie bietet zwei unterschiedliche Pflegepakete an: das kleine Pflegeprogramm „Badetag“ (B) und das große Pflegepaket „Komplettpflege“ (K). Zudem kann noch eine optionale Zahnpflege (Z) dazu gebucht werden.
Bei 60 % ihrer vierbeinigen Kunden handelt es sich um pflegeintensive Hunde. Während sich drei Viertel der Besitzer eines pflegeintensiven Hundes für eine Komplettpflege entscheiden, wählen nur 35 % der Besitzer von weniger pflegeintensiven Hunden die Komplettpflege. Unabhängig davon, welches Pflegeprogramm gewählt wird, entscheidet sich ein Fünftel der Besitzer eines pflegeintensiven Hundes für eine zusätzliche Zahnpflege. Ebenfalls unabhängig vom gewählten Pflegeprogramm wird bei weniger pflegeintensiven Hunden in 70 % der Fälle keine Zahnpflege dazugebucht.
Die Feststellung der Pflegeintensität eines zufällig ausgewählten Hundes zusammen mit der Wahl von Pflegeleistungen für diesen Hund wird als Zufallsexperiment betrachtet.

**4.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments.

Lösung S.48

**4.2** Nachfolgend finden Sie die Preisliste des in 4.0 beschriebenen Hundsalons

| | weniger pflegeintensiv | pfelgeintensiv |
|---|---|---|
| PFLEGEPAKETE | | |
| • kleines Pflegepaket „Badetag“ | 40 € | 60 € |
| • großes Pflegepaket „Komplettpflege“ | 70 € | 90€ |
| ZUSATZLEISTUNGEN | | |
| • Zahnpflege | 20 € | 30€ |

Die Zufallsgröße X gibt den Betrag in Euro an, den der Besuch eines Hundes im Hundesalon aus 4.0 kostet.
Erstellen Sie eine vollständige tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Berechnen Sie anschließend die durchschnittlichen Wocheneinnahmen des Hundesalons, wenn der Hundesalon von Montag bis Freitag geöffnet ist und die Besitzerin durchschnittlich vier Hunde pro Tag behandelt.

Lösung S.49

$\sum 23$

## TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Analysis **LÖSUNG**

**1.** Der Graph einer ganzrationalen Funktion $p$ zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$ besitzt den Scheitelpunkt $S(3|2)$ und verläuft durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie einen Funktionsterm $p(x)$ von $p$ und geben Sie die Wertemenge von $p$ an. **(4BE)**

Wir setzen in die Koordinaten von $S(3|2)$ in die Scheitelpunktform ein.
Scheitelpunktform:
$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ ($x_s$ x-Koordinate, $y_s$ y-Koordinate des Scheitelpunktes)
$f(x) = a(x - 3)^2 + 2$

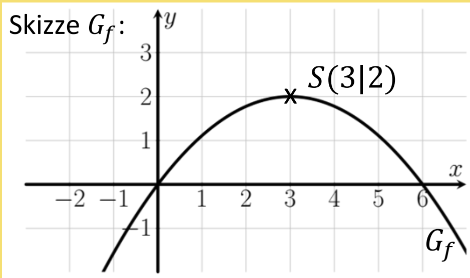
Der Graph verläuft durch den Koordinatenursprung. → Der Punkt $P(0|0)$ liegt auf dem Graphen. → Wir setzen diese Koordinaten in die Funktionsgleichung ein.

$0 = a(0 - 3)^2 + 2$

$0 = a \cdot 9 + 2 \quad | -2$

$-2 = a \cdot 9 \quad |:9$

$a = -\frac{2}{9}$




→ $W_f = ]-\infty; 2]$

Zurück zur Aufgabe

**2.0** Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto x^5 - 4x^3$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.
**2.1** Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $k$ und geben Sie ihre jeweilige Vielfachheit an. **(4BE)**

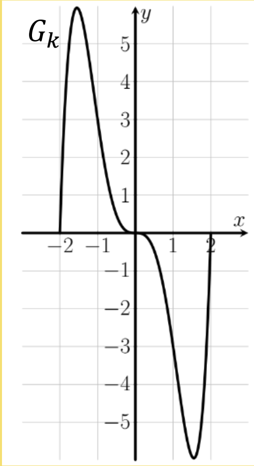
$x^5 - 4x^3 = 0$
$x^3 \cdot (x^2 - 4) = 0$
1. $x_{1,2,3} = 0$ (dreifach)

2. $x^2 - 4 = 0 \quad |+4$
$x^2 = 4$
→ $x_4 = -\sqrt{4}$; $x_5 = \sqrt{4}$;
$x_4 = -2$; (einfach) $x_5 = 2$; (einfach)

Zurück zur Aufgabe

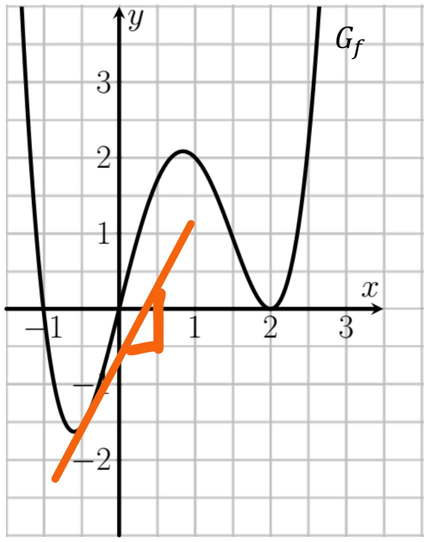
**2.2** Geben Sie einen Wert für $b$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $b \neq -1$ an, so dass gilt: $\int_{-1}^{b} k(x)\,dx = 0$. Begründen Sie Ihre Wahl. **(3BE)**

$b$ muss gleich $+1$ sein, da der Graph von $k$ punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und dann der Anteil der Fläche unterhalb der x-Achse gleich dem Anteil der Fläche oberhalb der x-Achse entspricht und somit dann die Flächenbilanz 0 wird.




Zurück zur Aufgabe

**3.0** Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_f$ einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion $f$ vierten Grades. Die Funktion $F$ bezeichne eine Stammfunktion von $f$.




**3.1** Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.
Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt $+1$ BE. Jedes falsch gesetzte $-0{,}5$ BE und jedes nicht gesetzte $0$ BE bewertet. **(4BE)**

| Aussage | w | f | n. e. |
|---|---|---|---|
| $f''(-1) > 0$ | X | | |
| $f'(2) = f(2)$ | X | | |
| Die lokale Änderungsrate der Funktion $f$ an der Stelle $x = -0{,}5$ ist negativ. | | X | |
| $F$ hat genau drei Nullstellen. | | | X |

Zurück zur Aufgabe

**3.2** Skizzieren Sie in das gegebene Koordinatensystem von 3.0 einen möglichen Graphen der Stammfunktion $F$, welcher durch den Koordinatenursprung verläuft. Aus Ihrer Skizze sollen — sofern vorhanden — Extrem- und Wendestellen des Graphen von $F$ klar ersichtlich sein. **(3BE)**

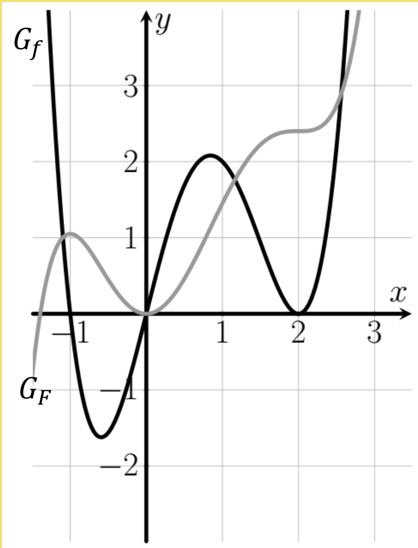
Hinweise:

Bei ganzrationalen Funktionen kommen der Graph der Funktion immer aus der anderen Richtung, als der Graph der Stammfunktion.

Einfach Nullstellen von $f$ ($G_f$ schneidet hier die x-Achse) werden zu Extremstellen von $F$. (NEW-Regel)

Doppelte Nullstellen von $f$ ($G_f$ berührt hier die x-Achse) werden zu Terrassenstellen von $F$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $F$ | N | E | W | |
| $f$ | | N | E | W |




Zurück zur Aufgabe

**4.0** Gegeben ist die Funktion $h$ mit der Funktionsgleichung $h(x) = x \cdot e^{x-2}$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente $G_t$ an den Graphen der Funktion $h$ an der Stelle $x = 2$. **(4BE)**

Gleichung der Tangente bestimmen:

1. Schritt: Bestimme die Steigung der zugehörigen Gerade.
Die Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle wird immer durch den Wert der Ableitung an dieser Stelle angegeben.

$h'(x) = 1 \cdot e^{x-2} + x \cdot e^{x-2} \cdot 1$

$m_2 = h'(2) = 1 \cdot e^{2-2} + 2 \cdot e^{2-2} \cdot 1$

$m_2 = h'(2) = 1 \cdot \underbrace{e^0}_{=1} + 2 \cdot \underbrace{e^0}_{=1} \cdot 1$

$m_2 = h'(2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1$

$m_2 = h'(2) = 3$

Ableitungsregel:
Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In Worten:
Ableiten Mal abschreiben plus abschreiben Mal ableiten.

Ableitungsregel:

$v(x) = e^{g(x)}$

$v'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In Worten:
Exponentialfunktion abschreiben Mal Nachdifferenzieren

2. Schritt: Setze die zugehörigen Punktkoordinaten in die Geradengleichung ein.

$y = m \cdot x + t$
$y = 3 \cdot x + t$

Wir haben nur den $x$-Wert, also müssen wir in die Funktionsgleichung einsetzen, um den zugehörigen $y$-Wert zu erhalten.

$h(2) = 2 \cdot e^{2-2} = 2 \rightarrow P(2|2)$
Einsetzen in die Geradengleichung:
$2 = 3 \cdot 2 + t$
$2 = 6 + t \quad | -6$
$t = -4$

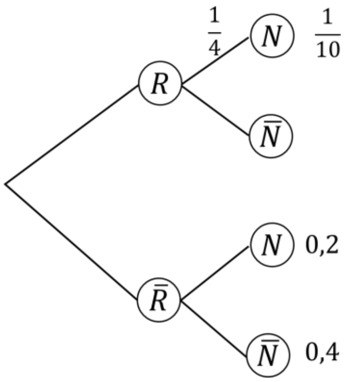
$\rightarrow y = 3x - 4$

Zurück zur Aufgabe

## TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Stochastik LÖSUNG

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

**1.0** Bei einem Online-Müsliversand kann man sich je nach persönlichem Geschmack aus verschiedenen Zutaten ein eigenes Müsli zusammenstellen. Erfahrungsgemäß unterscheiden sich die Geschmäcker der Kunden insbesondere bei Rosinen ($R$) und Nüssen ($N$) stark. Das Wahlverhalten eines zufällig ausgewählten Kunden hinsichtlich dieser beiden Zutaten in einer Müslimischung wird als Zufallsexperiment betrachtet (siehe Baumdiagramm).



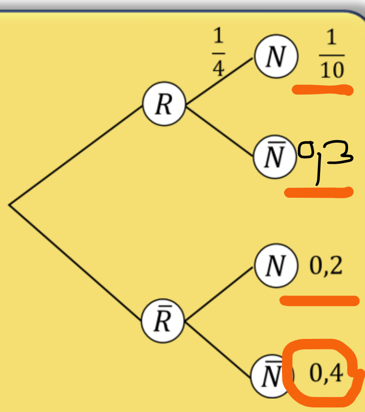

**1.1** Beschreiben Sie in Worten die im Baumdiagramm angegebene Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ im vor vorliegenden Sachzusammenhang. **(1BE)**

$\frac{1}{4}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die sich für Rosinen entschieden hat auch Nüsse wählt.

Zurück zur Aufgabe

**1.2** Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Kunde für Nüsse oder Rosinen entscheidet. **(2BE)**

Ansatz: $P(R \cup N) = P(R \cap N) + P(R \cap \overline{N}) + P(\overline{R} \cap N)$




$P(R) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \rightarrow P(R) = \frac{4}{10}$

$\rightarrow$ $P(R \cap \overline{N}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

ODER: $P(R \cap \overline{N}) = 1 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}4 = 0{,}3$

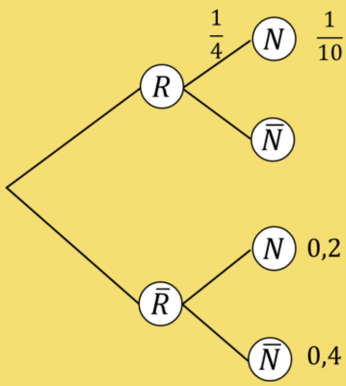
$P(R \cup N) = P(R \cap N) + P(R \cap \overline{N}) + P(\overline{R} \cap N) = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4} + 0{,}2 = 0{,}6$

Alternativ: $P(R \cup N) = 1 - P(\overline{R} \cap \overline{N}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Zurück zur Aufgabe

**1.3** Untersuchen Sie mithilfe geeigneter Berechnungen, ob die Ereignisse $R$ und $N$ stochastisch unabhängig sind. **(4BE)**

Stochastische Unabhängigkeit:
Zu zeigen $P(R \cap N) = P(R) \cdot P(N)$

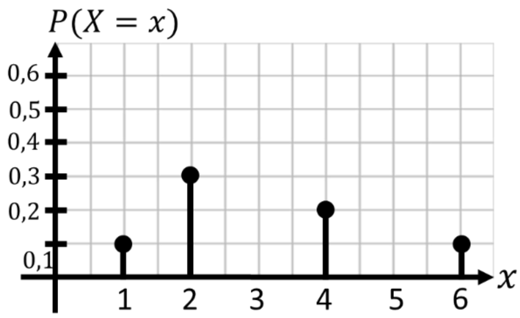



$P(R) = \frac{4}{10}$
$P(N) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$
$P(R) \cdot P(N) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12;$

$P(R \cap N) = 0{,}1$
→ Die Ereignisse $R$ und $N$ sind stochastisch abhängig.

Zurück zur Aufgabe

**2.0** Bei einem Zufallsexperiment wird ein gezinkter Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 einmal geworfen. Die Zufallsgröße $X$ gibt die gewürfelte Augenzahl an. Die unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ gibt die gewürfelte Augenzahl an. Die unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$ ist in folgendem Stabdiagramm dargestellt.
Es gilt: $P(X \leq 3) = 0{,}5$.



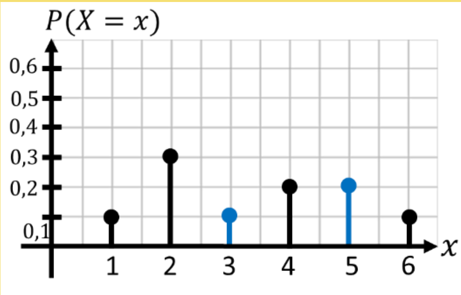

**2.1** Ermitteln Sie jeweils nachvollziehbar die Wahrscheinlichkeit, mit dem vorliegenden Würfel eine 3 zu würfeln, sowie die Wahrscheinlichkeit, mit dem vorliegenden Würfel eine 5 zu würfeln. Vervollständigen Sie damit das Diagramm.
[ Teilergebnis: $P(X = 5) = 0{,}2$ ] **(3BE)**

$0{,}1 + 0{,}3 + P(X = 3) = 0{,}5$

$0{,}4 + P(X = 3) = 0{,}5 \qquad | -0{,}4$

$P(X = 3) = 0{,}1$

→ $P(X = 5) = 1 - 0{,}1 - 0{,}3 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}2$




Zurück zur Aufgabe

**2.2** Der gezinkte Würfel soll in einem Gewinnspiel eingesetzt werden, bei dem er einmal geworfen wird und die gewürfelte Augenzahl die Auszahlung pro Spiel in Euro angibt. Bestimmen Sie, welcher Einsatz pro Spiel verlangt werden muss, damit das Spiel fair ist. **(2BE)**

$$\begin{aligned} E(X) &= 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}1 \cdot 6 \\ &= 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1 + 0{,}6 = 3{,}4 \end{aligned}$$

Es muss ein Einsatz von 3,4€ verlangt werden, damit das Spiel fair ist.

Zurück zur Aufgabe

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I **LÖSUNG**

**1.0** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{14}(x^3 - 12x^2 + 36x + 49)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion $f$ in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit $G_f$ bezeichnet.

**1.1** Untersuchen Sie die Funktion $f$ auf Nullstellen. **(4BE)**

$$\frac{1}{14}(x^3 - 12x^2 + 36x + 49) = 0 \quad |:\left(\frac{1}{14}\right)$$
$$x^3 - 12x^2 + 36x + 49 = 0$$

Wertetabelle mit dem Taschenrechner:

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-556$ | $-351$ | $-194$ | $-79$ | $0$ | $49$ | $74$ | $81$ | $76$ | $65$ | $54$ |

$x_1 = -1$

Polynomdivision:

$$(x^3 - 12x^2 + 36x + 49) : (x + 1) = x^2 - 13x + 49$$
$$-(x^3 + x^2)$$
$$-13x^2 + 36x + 49$$
$$-(-13x^2 - 13x)$$
$$49x + 49$$
$$-(49x + 49)$$
$$0$$

Selbstlernkurs: Polynomdivision

$x^2 - 13x + 49 = 0$

$x_{2,3} = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{-27}}{2}$ → keine weitere Lösung

→ einfache Nullstelle bei $x_1 = -1$, sonst keine weiteren Nullstellen.

Zurück zur Aufgabe

**1.2** Ermitteln Sie jeweils die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von $G_f$. **(5BE)**

$f(x) = \frac{1}{14}(x^3 - 12x^2 + 36x + 49)$

$f'(x) = \frac{1}{14}(3x^2 - 24x + 36)$

$\frac{1}{14}(3x^2 - 24x + 36) = 0$

$3x^2 - 24x + 36 = 0$

Ableitungsregel:

$f(x) = c \cdot x^n$

$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$

$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 36}}{2 \cdot 3}$ → $x_1 = 2$ (einfach, VZW); $x_2 = 6$ (einfach, VZW)

Globalverlauf ganzrationaler Funktionen

Vorzeichentabelle:

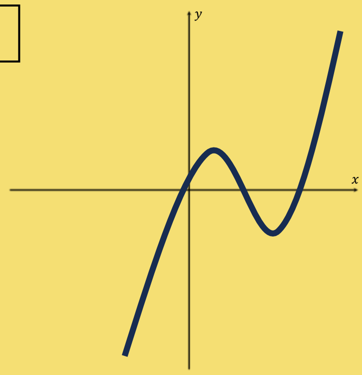
| $x$ | (1) | $x = 2$ | | $x = 6$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+++$ | 0 | $---$ | 0 | $+++$ |
| $G_f$ | ↗ | HOP | ↘ | TIP | ↗ |

Füllen der Vorzeichentabelle:

1. Möglichkeit: Probewert einsetzen

$f'(0) = \frac{1}{14}(3 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 36) = \frac{36}{14} > 0$

Skizze:




2. Möglichkeit: Globalverlauf von $G_f$

$f$ ist Funktion vom Grad 3 mit positivem Leitkoeffizient

→ $G_f$ geht von links unten nach rechts oben

Bestimmen der y-Koordinaten:

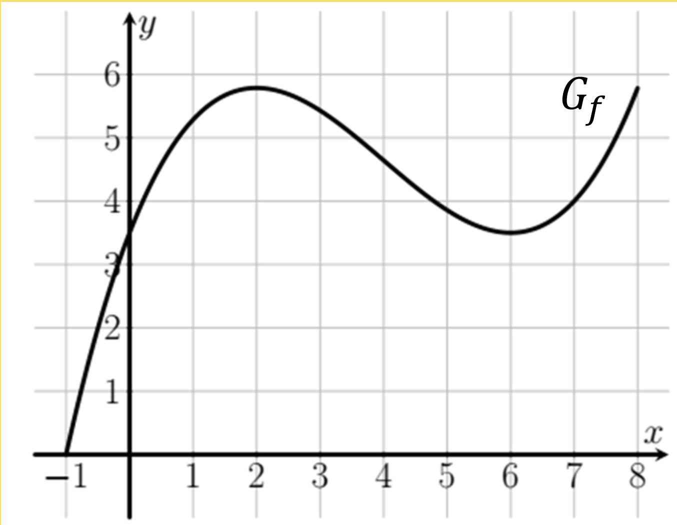
$f(2) = \frac{1}{14}(2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 49) = \frac{81}{14}$ → relativer HOP bei $H_1(2|\frac{81}{14})$

$f(6) = \frac{1}{14}(6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 49) = \frac{7}{2}$ → relativer TIP bei $T_1(6|\frac{7}{2})$

Zurück zur Aufgabe

**1.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen $G_f$ für $-1 \leq x \leq 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1\ cm$ **(4BE)**

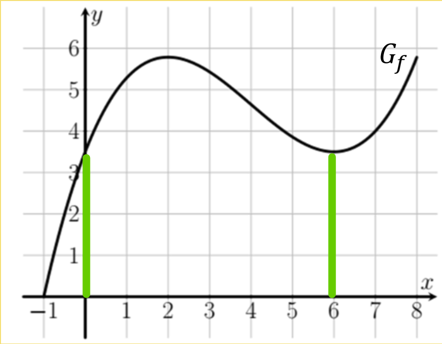
| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $3{,}5$ | $5{,}29$ | $5{,}79$ | $5{,}43$ | $4{,}64$ | $3{,}86$ | $3{,}50$ | $4{,}00$ | $5{,}79$ |




Wertetabellen und Graphen

Zurück zur Aufgabe

**1.4** Der Graph der Funktion $f$ und die Gerade mit der Gleichung $x = 6$ schließen zusammen mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Teilaufgabe 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **(4BE)**




Maßzahl des Flächeninhalts:

$$\int_0^6 f(x)dx = [F(x)]_0^6 = F(6) - F(0) = \frac{201}{7} - 0 = \frac{201}{7}$$

$$f(x) = \frac{1}{14}(x^3 - 12x^2 + 36x + 49)$$

Eine Stammfunktion bilden:

$h(x) = c \cdot x^n$

$H(x) = c \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

NR:

$$F(x) = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{12}{3}x^3 + \frac{36}{2}x^2 + 49x\right)$$

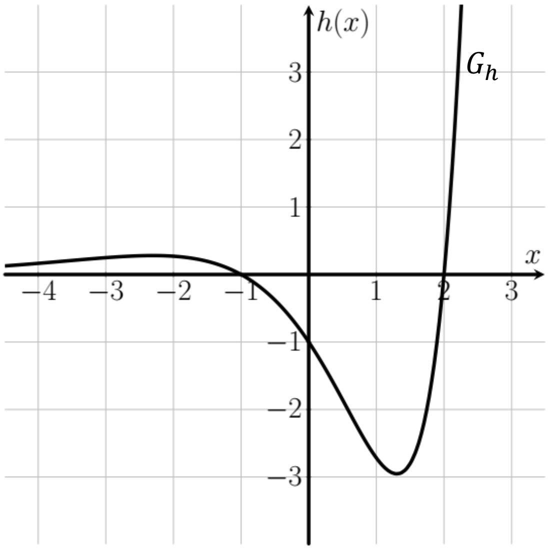
$$F(x) = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 49x\right)$$

$$F(6) = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{4} \cdot 6^4 - 4 \cdot 6^3 + 18 \cdot 6^2 + 49 \cdot 6\right) = \frac{201}{7}$$

$$F(0) = \frac{1}{14}\left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 18 \cdot 0^2 + 49 \cdot 0\right) = 0$$

Zurück zur Aufgabe

2.0 Gegeben ist ein Ausschnitt des Graphen $G_h$ der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h$ mit der Funktionsgleichung $h(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen $G_h$ mit den Koordinatenachsen haben ganzzahlige Werte und können der Abbildung entnommen werden.




**2.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter $a$, $b$ und $c$. **(6BE)**

(I) $h(-1) = 0$

$(a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c) \cdot e^{-1} = 0 \quad |:(e^{-1})$

$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0$

$a - b + c = 0$

(II) $h(0) = (-1)$

$(a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c) \cdot e^0 = -1$

$c \cdot 1 = -1$

$\rightarrow c = -1$

(III) $h(-1) = 0$

$(a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c) \cdot e^2 = 0 \quad |:(e^2)$

$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0$

$4a + 2b + c = 0$

$c$ in (I) und (III):

(I)‘ $a - b - 1 = 0 \rightarrow a = b + 1$

(II)’ $4a + 2b - 1 = 0$

$a$ in (II)’:

$4(b + 1) + 2b - 1 = 0$

$4b + 4 + 2b - 1 = 0$

$6b + 3 = 0 \quad | - 3$

$6b = -3 \quad |:6$

$b = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$\rightarrow h(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) \cdot e^x$

Zurück zur Aufgabe

**2.2** Die Funktion $H$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $h$. Deuten Sie $|H(2) - H(0)| \approx 4{,}19$ geometrisch in Bezug auf $G_h$. **(2BE)**

Die Maßzahl des Flächeninhalts, die der Graph von $h$ mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten einschließt, beträgt 4,19 FE.

Zurück zur Aufgabe

**3.0** Die Population eines bestimmten Bienenvolkes von Beginn des Monats März bis Ende Oktober kann näherungsweise durch die Funktion $N$ mit der Funktionsgleichung $N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0{,}125 \cdot t - 0{,}2} + 5$ mit $t \in [0; 35]$ modelliert werden. Ab Ende Oktober verändert sich die Anzahl der Bienen in diesem Volk nach anderen Gesetzmäßigkeiten und soll im Folgenden nicht weiter betrachtet werden. Die Variable $t$ im Funktionsterm steht für die seit Beobachtungsbeginn Anfang März ( $t_0 = 0$ ) vergangene Zeit in Wochen. Der Funktionswert von $N$ gibt die Anzahl der Bienen in Tausend zum Zeitpunkt $t$ an. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

**3.1** Geben Sie die Anzahl der Bienen zu Beobachtungsbeginn an und berechnen Sie, wie viele Bienen das Volk fünf Wochen nach Beobachtungsbeginn zählt. **(3BE)**

Anzahl der Bienen zu Beobachtungsbeginn: $N(0) = 2 \cdot 0^2 \cdot e^{-0{,}125 \cdot 0 - 0{,}2} + 5 = 5$

Zu Beobachtungsbeginn beträgt die Population 5000 Bienen.

Anzahl der Bienen nach fünf Wochen: $N(5) = 2 \cdot 5^2 \cdot e^{-0{,}125 \cdot 5 - 0{,}2} + 5 \approx 26{,}912$

Nach fünf Wochen beträgt die Population ca. 26912 Bienen.

Zurück zur Aufgabe

**3.2** Ermitteln Sie, nach wie vielen Wochen die Anzahl der Bienen im Beobachtungszeitraum das absolute Maximum erreicht hat und berechnen Sie diese maximale Bienenanzahl.
[ mögliches Teilergebnis: $\dot{N}(t) = e^{-0{,}125\cdot t-0{,}2}(-0{,}25t^2 + 4t)$ ] **(8BE)**

$N(t) = 2t^2 \cdot e^{-0{,}125\cdot t-0{,}2} + 5$

$\dot{N}(t) = 4te^{-0{,}125\cdot t-0{,}2} + 2t^2 \cdot e^{-0{,}125\cdot t-0{,}2}(-0{,}125)$

$\dot{N}(t) = e^{-0{,}125\cdot t-0{,}2}(4t + 2t^2 \cdot (-0{,}125))$

$\dot{N}(t) = e^{-0{,}125\cdot t-0{,}2}(4t - 0{,}25t^2)$

Ableitungsregel:
Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In Worten:
Ableiten Mal abschreiben plus abschreiben Mal ableiten.

$\underbrace{e^{-0{,}125\cdot t-0{,}2}}_{>0}(-0{,}25t^2 + 4t) = 0$

$-0{,}25t^2 + 4t = 0$

$t(-0{,}25t + 4) = 0$

1. $t_1 = 0$ (einfach, VZW)
2. $-0{,}25t + 4 = 0 \quad |+0{,}25t$
   $0{,}25t = 4 \quad |:0{,}25$
   $t_2 = 16$ (einfach, VZW)

Ableitungsregel:

$v(x) = e^{g(x)}$

$v'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In Worten:
Exponentialfunktion abschreiben Mal Nachdifferenzieren

VZT: $PW(1)$

| | $t = 0$ | $0 < t < 16$ | $t = 16$ | $16 < t < 35$ | $t = 35$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dot{N}(x)$ | 0 | $+++$ | 0 | $---$ | $---$ |
| $G_T$ | RandTIP | ↗ | HOP | ↘ | RandTIP |

➔ Absoluter Hochpunkt

Berechnen der maximalen Bienenanzahl

$N(16) = 2 \cdot 16^2 \cdot e^{-0{,}125\cdot 16-0{,}2} + 5 \approx 61{,}731$

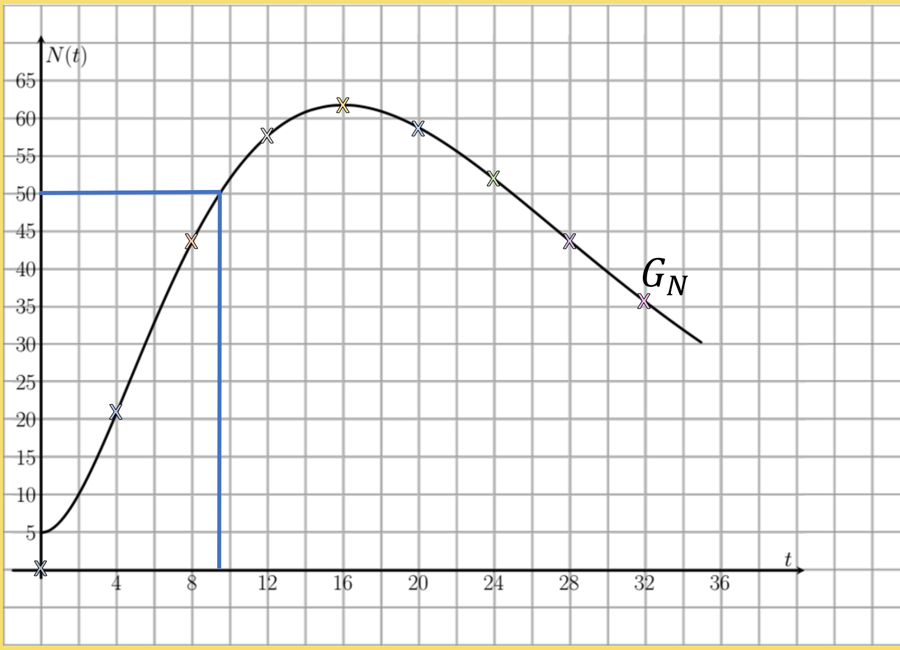
➔ Die maximale Bienenanzahl wird nach 16 Wochen erreicht und beträgt ca. 61731 Bienen.

Zurück zur Aufgabe

**3.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion $N$ im angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie anschließend mithilfe des Graphen nachvollziehbar den Monat, in welchem die Anzahl der Bienen im Volk erstmals 50000 beträgt.
Maßstab: 4 Wochen ≙ 1 cm; 10000 Bienen ≙ 1 cm **(5BE)**

Wertetabelle im TR:

| $t$ | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(t)$ | 5 | 20,9 | 43,6 | 57,6 | 61,7 | 58,8 | 52,0 | 43,8 | 35,7 |




Wertetabellen und Graphen

$t \approx 9{,}2$ (Wochen)
Die Anzahl der Bienen beträgt im Monat Mai erstmals 50000.

Zurück zur Aufgabe

**3.4** An der Stelle $t_W \approx 4{,}7$ ändert der Graph der Funktion $N$ sein Krümmungsverhalten von einer Links- in eine Rechtskrümmung. Weiterhin gilt $\dot{N}(t_W) \approx 6{,}04$ . Interpretieren Sie die beiden Werte im Sachzusammenhang. **(2BE)**

Nach $t_W \approx 4{,}7$ Wochen ist die Zunahme des Bienenvolkes mit ca. $6040$ Bienen pro Woche am größten.

Zurück zur Aufgabe

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II **LÖSUNG**

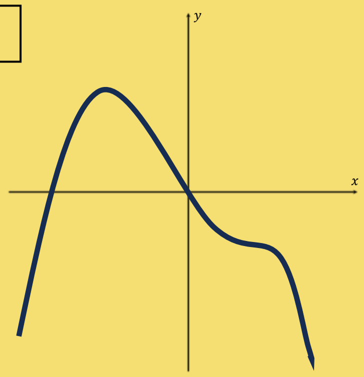
**1.** Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f$ mit $f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$ und der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion $f$ in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit $G_f$ bezeichnet.

**1.1** Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von $f$ für $x \to \pm\infty$ an. **(2BE)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Skizze:




[Globalverlauf ganzrationaler Funktionen]

Zurück zur Aufgabe



Hügel-Schule BY HÜGEL RUDOLF

**1.2** Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der Punkte von $G_f$ mit waagrechter Tangente. **(8BE)**

Punkte mit waagrechter Tangente sind Punkte bei denen der Funktionsgraph einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder einen Terrassenpunkt besitzt. Um diese zu bestimmen benötigen wir die Nullstellen der 1. Ableitung von $f$.

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{8}(4x^3 - 12x + 8)$$

$$-\frac{1}{8}(4x^3 - 12x + 8) = 0$$

$$4x^3 - 12x + 8 = 0$$

Ableitungsregel:

$$f(x) = c \cdot x^n$$

$$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Wir erstellen eine Wertetabelle, um die erste Lösung der Gleichung zu finden:

| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | -432 | -200 | -64 | 0 | 16 | 8 | 0 | 16 | 80 | 216 | 448 |

Selbstlernkurs Polynomdivision

→ $x_1 = 1$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(4x^3 \qquad - 12x + 8) : (x - 1) = 4x^2 + 4x - 8 \\
\underline{-(4x^3 - 4x^2)} \\
\qquad +4x^2 - 12x + 8 \\
\qquad \underline{-(+4x^2 - 4x)} \\
\qquad\qquad -8x + 8 \\
\qquad\qquad \underline{-(-8x + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 8 = 0$$

$x_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)}}{2 \cdot 4}$ → $x_2 = -2$ (einfach, VZW); $x_{1,3} = 1$ (doppelt, kVZW)

Vorzeichentabelle:

| $x$ | | $x = -2$ | PW(0) | $x = 1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+++$ | 0 | $---$ | 0 | $---$ |
| $G_f$ | ↗ | HOP | ↘ | TIP | ↘ |

Füllen der Vorzeichentabelle:

1. Möglichkeit: Probewert einsetzen

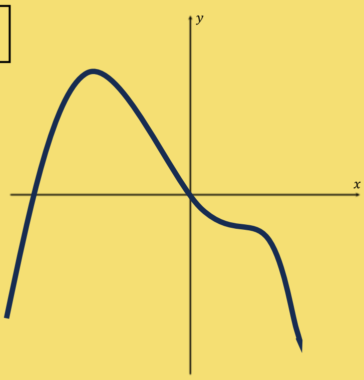
$f'(0) = -\frac{1}{8}(4 \cdot 0^3 - 12 \cdot 0 + 8) = -1 < 0$

2. Möglichkeit: Globalverlauf von $G_f$

$f$ ist Funktion vom Grad 4 mit negativem Leitkoeffizient

→ $G_f$ geht von links unten nach rechts unten

Skizze:




[Globalverlauf ganzrationaler Funktionen]

Bestimmen der y-Koordinaten:

$f(-2) = -\frac{1}{8}((-2)^4 - 6(-2)^2 + 8 \cdot (-2)) = 3$ → absoluter HOP bei $H_1(-2|3)$

$f(1) = -\frac{1}{8}(1^4 - 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1) = -\frac{3}{8}$ → Terrassenpunkt bei $TEP_1(1|-\frac{3}{8})$

Zurück zur Aufgabe

**1.3** Zeigen Sie, dass die Gerade $G_g$ mit $g(x) = -x + \frac{5}{8}$ und $D_g = \mathbb{R}$ durch die beiden Wendepunkte von $G_f$ verläuft. **(6BE)**

Wir bestimmen die Koordinaten der Wendepunkte von $G_f$.

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$$
$$f'(x) = -\frac{1}{8}(4x^3 - 12x + 8)$$
$$f''(x) = -\frac{1}{8}(12x^2 - 12)$$

Ableitungsregel:

$f(x) = c \cdot x^n$

$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$

$$-\frac{1}{8}(12x^2 - 12) = 0$$
$$12x^2 - 12 = 0 \qquad |+12$$
$$12x^2 = 12 \qquad |:12$$
$$x^2 = 1$$

$\rightarrow x_1 = -\sqrt{1} = -1;\ x_2 = \sqrt{1} = 1$; jeweils einfach $\rightarrow$ Wendestellen von $f$.

Koordinatenbestimmung: Wir setzen die $x$-Werte in $f(x)$ ein.

$f(-1) = -\frac{1}{8}\left((-1)^4 - 6 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1)\right) = \frac{13}{8} \rightarrow W_1\left(-1\middle|\frac{13}{8}\right)$

$f(1) = -\frac{1}{8}(1^4 - 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1) = -\frac{3}{8} \rightarrow W_2\left(1\middle|-\frac{3}{8}\right)$

Wir setzen die $x$-Koordinate der Punkte ein und überprüfen, ob die $y$-Koordinate dabei rauskommt.

$g(-1) = -(-1) + \frac{5}{8} = \frac{13}{8} \rightarrow W_1\left(-1\middle|\frac{13}{8}\right)$ liegt auf $G_g$.

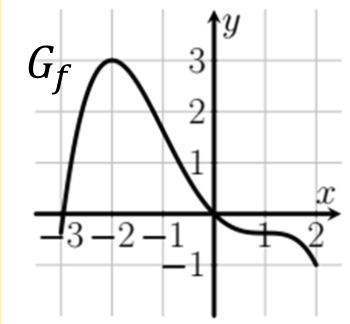
$g(1) = -1 + \frac{5}{8} = -\frac{3}{8} \rightarrow W_2\left(-1\middle|-\frac{3}{8}\right)$ liegt auf $G_g$.

Die Gerade $G_g$ verläuft durch die beiden Wendepunkte von $G_f$.

Zurück zur Aufgabe

**1.4** Zeichnen Sie $G_f$ und $G_g$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte für $-3 \leq x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 2cm$ **(5BE)**

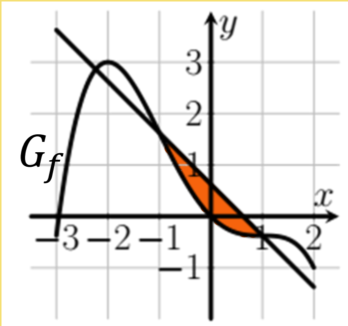
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0{,}375$ | $3$ | $\frac{13}{8}\ (WP_1)$ | $0$ | $-\frac{3}{8}\ (WP_2)$ | $-1$ |




Wertetabellen und Graphen

Zurück zur Aufgabe

**1.5** Die Gerade $G_g$ schließt mit $G_f$ im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **(5BE)**




Eine Stammfunktion bilden:

$h(x) = c \cdot x^n$

$H(x) = c \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

Wir bestimmen die Maßzahl des Flächeninhalts:

$g(x) = -x + \frac{5}{8}$

$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)$

$$\int_{-1}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} \left[-x + \frac{5}{8} + \frac{1}{8}(x^4 - 6x^2 + 8x)\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[-x + \frac{5}{8} + \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}\right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{8}x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{40} \cdot 1^5 - \frac{1}{4} \cdot 1^3 + \frac{5}{8} \cdot 1 - \left(\frac{1}{40} \cdot (-1)^5 - \frac{1}{4} \cdot (-1)^3 + \frac{5}{8} \cdot (-1)\right)$$
$$= 0{,}4 - (-0{,}4)$$
$$= 0{,}8 \ \text{[FE]}$$

Zurück zur Aufgabe

**2.0** Die Körpertemperatur einer an einem grippalen Infekt erkrankten Person kann vereinfacht durch die Modellfunktion $T$ mit der Funktionsgleichung

$$T(t) = 36{,}5 + 2t \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \text{ mit } t \in \mathbb{R}_0^+$$

beschrieben werden. Dabei steht die Variable $t$ für die Zeit in Tagen ab Auftreten der ersten Symptome zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und $T(t)$ für die Körpertemperatur in $°C$ zum Zeitpunkt $t$.
Auf das Mitführen von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

**2.1** Untersuchen Sie, welche Temperatur sich nach diesem Modell theoretische langfristig einstellt. **(4BE)**

$$\lim_{t \to \infty} 36{,}5 + \underbrace{2t}_{\to \infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-0{,}25 \cdot t}^{\to -\infty}}}_{\to 0} = 36{,}5$$

Langfristig stellt sich eine Temperatur von 36,5 Grad ein.

Exponentialfunktion schlägt Potenzfunktion:

$e^x$ 👊 $x^n$

Zurück zur Aufgabe

**2.2** Ermitteln Sie rechnerisch, welche maximale Körpertemperatur die erkrankte Person nach diesem Modell erreicht. **(6BE)**
[ Mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \cdot (1 - 0{,}25t)$ ]

$T(t) = 36{,}5 + 2t \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$
$T'(t) = 2 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 2t \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \cdot (-0{,}25)$
$T'(t) = e^{-0{,}25t}(2 + 2t(-0{,}25))$
$T'(t) = e^{-0{,}25t}(2 - 0{,}5t)$

$T'(t) = 0$
$\underbrace{e^{-0{,}25t}}_{>0}(2 - 0{,}5t) = 0$
$2 - 0{,}5t = 0 \quad |-2$
$-0{,}5t = -2 \quad |:(-0{,}5)$
$t = 4$ (einfach; VZW)

Ableitungsregel:
Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

In Worten:
Ableiten Mal abschreiben plus abschreiben Mal ableiten.

Ableitungsregel:
Exponentialfunktion

$v(x) = e^{g(x)}$

$v'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

In Worten:
Exponentialfunktion abschreiben

VZT: $PW(0)$

| | | $t = 4$ | |
|---|---|---|---|
| $T'(t)$ | $+++$ | 0 | $---$ |
| $G_T$ | ↗ | HOP | ↘ |

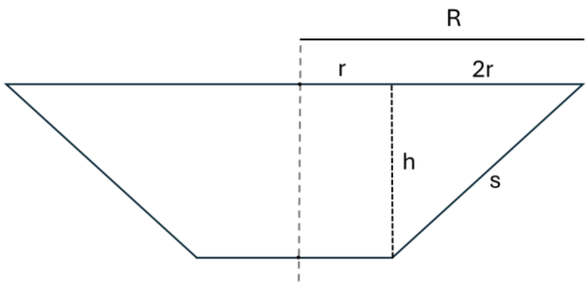
→ absoluter HOP

$T(4) = 36{,}5 + 2 \cdot 4 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 4} \approx 39{,}44$ [°C]

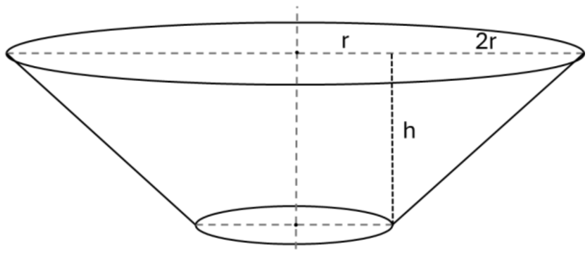
Die erkrankte Person erreicht eine maximale Körpertemperatur von 39,44 [°C].

Zurück zur Aufgabe

**3.0** Ein Pflanzgefäß hat die Form eines umgedrehten geraden Kreiskegelstumpfes, dessen Querschnittsfläche ein Trapez ist (siehe nachfolgende nicht maßstabsgetreue Skizzen). Der obere Kreisradius $R$ ist dreimal so groß wie der untere Kreisradius $r$. Die Länge der Seitenkante $s$ beträgt 25 $cm$. Vorgaben der Produktion legen fest, dass die Höhe $h$ des Pflanzengefäßes mindestens 15 $cm$ und höchstens 23 $cm$ beträgt.
Die Dicke der „Wände" darf bei den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.




Querschnitt




Räumliche Ansicht

Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass für das Volumen dieses geraden Kreiskegelstumpfes gilt:

$$V(r;h) = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

**3.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen des Pflanzgefäßes in Abhängigkeit von der Höhe $h$ gilt:

$$V(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi \cdot (625h - h^3)$$ **(3BE)**

Hauptbedingung: $V(r;h) = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Nebenbedingung: $h^2 + (2r)^2 = 25^2$

$h^2 + 4r^2 = 625$

$4r^2 = 625 - h^2$

$r^2 = \frac{1}{4}(625 - h^2)$

Zielfunktion: $V(h) = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}(625 - h^2) \cdot h$

$$V(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi(625h - h^3)$$

Zurück zur Aufgabe

**3.2** Bestimmen Sie den Wert für die Höhe $h$ des Pflanzgefäßes so, dass das Volumen des Pflanzgefäßes maximal ist. Berechnen Sie das maximale Volumen sowie den dazugehörigen oberen Durchmesser des Pflanzengefäßes. **(6BE)**

Wir bestimmen das Maximum von $V$. $D_V = [15; 23]$

$$V(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi(625h - h^3)$$
$$V'(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi(625 - 3h^2)$$
$$\frac{13}{12} \cdot \pi(625 - 3h^2) = 0 \qquad |:\left(\frac{13}{3}\pi\right)$$
$$625 - 3h^2 = 0 \qquad |-625$$
$$-3h^2 = -625$$
$$h^2 = \frac{625}{3}$$
$$\rightarrow h_{max} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \approx 14{,}43\ [cm]$$

Ableitungsregel: Konstantenregel

$f(x) = c \cdot u(x)$

$f'(x) = c \cdot u'(x)$

$$V_{max} = \frac{13}{12} \cdot \pi(625h_{max} - h_{max}^3) \approx 20420\ [cm^3]$$

Mit der Gleichung aus 3.1

$$r^2 = \frac{1}{4}(625 - h^2)$$
$$r_{max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{625 - h_{max}^2} \approx 10\ [cm]$$

Zurück zur Aufgabe

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.
Auf einem Volksfest bieten Schausteller unter anderem verschiedene Spielgeschäfte an.

**1.0** Bei der Losbude „Crazy Cat" kann man Lose ziehen und es gilt

20% der Lose sind Gewinnlose.

Das Ziehen der Lose aus der großen Lostrommel, in der sich sehr viele Lose befinden, wird als Zufallsexperiment betrachtet. Die Gewinnwahrscheinlichkeit kann dabei über die einzelnen Züge hinweg näherungsweise als konstant angenommen werden.

**1.1.** Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
$E_1$ : „Unter 25 gezogenen Losen sind höchstens drei Gewinnlose."
$E_2$ : „Unter 30 gezogenen Losen sind mehr Gewinnlose als zu erwarten wären." **(4BE)**

$$P(E_1) = P_{0,20}^{25}(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} B(25; 0,2; i) = 023399$$

Erwartungswert bei 30 Losen:
$E(X) = n \cdot p = 30 \cdot 0,20 = 6$

$$P(E_2) = P_{0,20}^{30}(X > 6) = \sum_{i=7}^{30} B(30; 0,2; i)$$
$$= 1 - \sum_{i=7}^{30} B(30; 0,2; i)$$
$$= 1 - \sum_{i=0}^{6} B(30; 0,2; i)$$
$$= 1 - 0,60697$$
$$= 0,39303$$

| $n = 25; p = 0,20;$ | | |
|---|---|---|
| $k$ | $B(n;p;k)$ | $\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$ |
| 0 | 0,00378 | 0,00378 |
| 1 | 0,02361 | 0,02739 |
| 2 | 0,07084 | 0,09823 |
| 3 | 0,13577 | 0,23399 |
| 4 | 0,18668 | 0,42067 |
| 5 | 0,19602 | 0,61669 |
| 6 | 0,16335 | 0,78004 |
| 7 | 0,11084 | 0,89088 |
| 8 | 0,06235 | 0,95323 |
| 9 | 0,02944 | 0,98267 |
| 10 | 0,01178 | 0,99445 |
| ... | ... | ... |

| $n = 30; p = 0,20;$ | | |
|---|---|---|
| $k$ | $B(n;p;k)$ | $\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$ |
| 0 | 0,00124 | 0,00124 |
| 1 | 0,00928 | 0,01052 |
| 2 | 0,03366 | 0,04418 |
| 3 | 0,07853 | 0,12271 |
| 4 | 0,13252 | 0,25523 |
| 5 | 0,17946 | 0,42751 |
| 6 | 0,17946 | 0,60697 |
| 7 | 0,15382 | 0,76079 |
| 8 | 0,11056 | 0,87135 |
| 9 | 0,06756 | 0,93891 |
| 10 | 0,03547 | 0,99051 |
| ... | ... | ... |

Zurück zur Aufgabe

**1.2.** Nun werden 10 Lose nacheinander gezogen und jedes Los wird direkt nach dem Ziehen geöffnet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

$E_3$ : „Es werden genau drei Gewinnlose gezogen und diese folgen nacheinander.“ **(2BE)**

$$P(E_2) = 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7 \cdot 8 \approx 0{,}01342$$

Zurück zur Aufgabe

**1.3** Ermitteln Sie, wie viele Lose mindestens gezogen werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein gezogenes Gewinnlos mindestens 95% beträgt. **(4BE)**

$$P_{0{,}20}^{n}(X \geq 1) \geq 0{,}95$$

$$1 - \sum_{i=1}^{n} B(n; 0{,}2; i) \geq 0{,}95$$

$$1 - B(n; 0{,}2; 0) \geq 0{,}95$$

$$1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{0{,}2^0}_{=1} \cdot 0{,}8^n \geq 0{,}95$$

$$1 - 0{,}8^n \geq 0{,}95 \qquad | - 1$$

$$-0{,}8^n \geq -0{,}05 \qquad | \cdot (-1)$$

$$0{,}8^n \leq 0{,}05 \qquad | \log_{0{,}8}$$

$$n \leq \log_{0{,}8}(0{,}05) \approx 13{,}4$$

Es müssen mindestens 14 Lose gezogen werden.

Zurück zur Aufgabe

**1.4** Die Losbude „Happy End“ verspricht eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit als die 20% der Losbude „Crazy Cat“ (Gegenhypothese). Ob dieses Versprechen zutrifft, soll mithilfe eines Hypothesentests untersucht werden, indem 50 Lose von „Happy End“ gekauft und geöffnet werden.

Geben Sie zu diesem Test die Testgröße an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese auf dem 5%-Signifikanzniveau. **(5BE)**

Testgröße
$T$ =“Anzahl an Gewinnlosen der Losbude Happy End unter 50“

$H_0: p \leq 0{,}20$ $H_1: p > 0{,}2$ (rechtsseitiger Hypothesentest)

$A = \{0; 1; 2; \dots; k\}$ $\bar{A} = \{k+1; \dots; 50\}$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

Teststatistik:

→ $P_{0,20}^{50}(X \in \bar{A}) \leq 0{,}05$

$$\sum_{i=k+1}^{50} B(50; 0{,}20; i) \leq 0{,}05$$

$$1 - \sum_{i=0}^{k} B(50; 0{,}20; i) \leq 0{,}05 \quad | -1$$

$$-\sum_{i=0}^{k} B(50; 0{,}20; i) \leq -0{,}95 \quad | \cdot (-1)$$

$$\sum_{i=0}^{k} B(50; 0{,}20; i) \geq 0{,}95$$

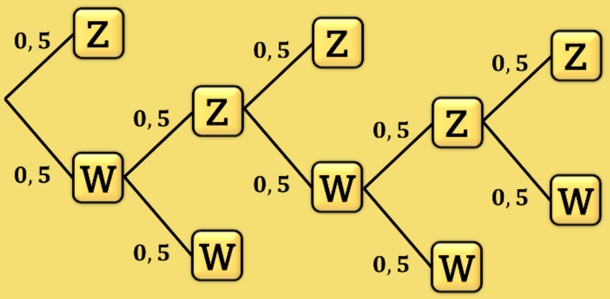
$$\xrightarrow{Tafelwerk} k_{max} = 15$$

$A = \{0; 1; 2; \dots; 15\}$ $\bar{A} = \{16; \dots; 50\}$

Zurück zur Aufgabe

**2.0** Beim Glücksspielgeschäft „Münzen Magic“ kann man für einen Einsatz von 3€ an einem Glücksspiel teilnehmen. Dabei wird eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen ($W$) und Zahl ($Z$) bis zu fünf Mal nacheinander geworfen. Erscheint beim ersten Wurf Zahl, endet das Spiel sofort. Das Spiel wird ebenso beendet, wenn in zwei aufeinanderfolgenden Würfen das gleiche Symbol erscheint. Spätestens nach fünft Würfen endet das Spiel.

**2.1** Bestimmen Sie für das vorliegende Zufallsexperiment mithilfe eines Baumdiagramms einen geeigneten Ergebnisraum. **(4BE)**




$\omega = \{(Z); (W;W); (W;Z;Z); (W;Z;W;W); (W;Z;W;Z;Z); (W;Z;W;Z;W)\}$

Zurück zur Aufgabe

**2.2** Erscheint zweimal nacheinander Wappen, so werden 4€ ausbezahlt. Wenn zweimal nacheinander Zahl erscheint, werden 8€ ausbezahlt. In allen anderen Fällen wird nichts ausbezahlt. Die Zufallsgröße $X$ gibt die Höhe der Auszahlung pro Spiel in Euro an.

Erstellen Sie eine vollständige tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße $X$ und bestimmen Sie, um wie viel man den Einsatz von 3€ pro Spiel erhöhen bzw. verringern müsste, damit es sich um ein faires Spiel handelt. **(4BE)**

| $\boldsymbol{x}$ | $0$ | $4$ | $8$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{\omega}$ | $(Z)$; $(W;Z;W;Z;W)$ | $(W;W)$; $(W;Z;W;W)$ | $(W;Z;Z)$; $(W;Z;W;Z;Z)$ |
| $\boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{\omega}\})$ | $0{,}5 + 0{,}5^5 = \frac{17}{32}$ | $0{,}5^2 + 0{,}5^4 = \frac{5}{16}$ | $0{,}5^3 + 0{,}5^5 = \frac{5}{32}$ |

Zurück zur Aufgabe

## TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

**1.** In einer In einer Kleinstadt lebte im Jahr 2022 in 48 % aller Haushalte mindestens ein Heimtier (H). 41 % aller Haushalte dieser Kleinstadt waren Einpersonenhaushalte, sogenannte Singlehaushalte (S). In 34 % aller Singlehaushalte dieser Kleinstadt lebte mindestens ein Heimtier.
Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und berechnen Sie den Anteil der Singlehaushalte ohne Heimtier unter allen Haushalten. **(4BE)**

| | $H$ | $\overline{H}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | 0,1394 | 0,2706 | 0,41 |
| $\bar{S}$ | 0,3406 | 0,2494 | 0,59 |
| | 0,48 | 0,52 | 1 |

$P_S(H) = 0{,}34$

$P_S(H) = \frac{P(S \cap H)}{P(H)}$

34% von 41% wird berechnet:

$P(S \cap H) = 0{,}34 \cdot 0{,}41 = 0{,}1394$

Zurück zur Aufgabe



Hügel-Schule
BY HÜGEL RUDOLF

**2.** Hunde sind nach Katzen die beliebtesten Heimtiere. Danach folgen sogenannte Kleintiere, wie z. B. Kaninchen oder Hamster. Kleintiere werden in 4 % aller Haushalte gehalten. Zudem besitzen 12 % aller Haushalte mindestens zwei verschiedene Heimtierarten. Bei einer Umfrage werden die Bewohner von 50 zufällig ausgewählten Haushalten einer Kleinstadt befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$E_1$ : „In genau fünf der Haushalte leben Kleintiere."
$E_2$ : „In mindestens einem der Haushalte leben mindestens zwei verschiedene Heimtierarten." **(3BE)**

$$P(E_1) = P(X = x) = \binom{50}{5} \cdot 0{,}04^5 \cdot 0{,}96^{45} \approx 0{,}03456$$

$$\begin{aligned} P(E_2) = P_{0,12}^{50}(X \geq 1) &= 1 - P_{0,12}^{50}(X = 0) \\ &= 1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{50} \\ &= 1 - 0{,}88^{50} \\ &\approx 0{,}99832 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

**3.** Im Jahr 2022 kauften 80 % der Heimtierhalter ihren Heimtierbedarf (Fertignahrung, Bedarfsartikel und Zubehör) im stationären Handel, also in einem Geschäft vor Ort. Da dieser Anteil im Vergleich zum Vorjahr weitgehend konstant geblieben ist, möchte ein stationärer Händler für Heimtierbedarf auf die Möglichkeit des zusätzlichen Onlinehandels verzichten. Sein Berater rät ihm allerdings dazu, seine Produkte zunehmend auch online zu vertreiben, da er behauptet, dass die Marktanteile des stationären Handels zugunsten des Onlinehandels schrumpfen werden (Gegenhypothese).
Um eine Entscheidung zu treffen, befragt der Händler 200 zufällig ausgewählte Kunden, ob sie weiterhin stationär bei ihm einkaufen oder in Zukunft lieber online bestellen möchten.
Entwickeln Sie für den Händler für Heimtierbedarf einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5 % und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 152 seiner Kunden angeben, weiterhin stationär bei ihm einkaufen zu wollen. **(5BE)**

Testgröße $X$:="Anzahl an Personen, die im stationärem Handel kaufen unter 200."

Nullhypothese: $H_0: p \geq 0{,}80$; Alternativhypothese: $H_1: P < 0{,}80$;
(linksseitiger Hypothesentest)

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0,1, \dots k\}$
Annahmebereich: $A = \{k+1; \dots; 200\}$

Teststatistik: $P_{0,80}^{200}(X \in \bar{A}) \leq 0{,}05$

$$\sum_{i=0}^{k} B(200; 0{,}80; i) \leq 0{,}05$$

➔ Tafelwerk: $k_{max} = 150$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0,1, \dots 150\}$
Annahmebereich: $A = \{k+1; \dots; 151\}$

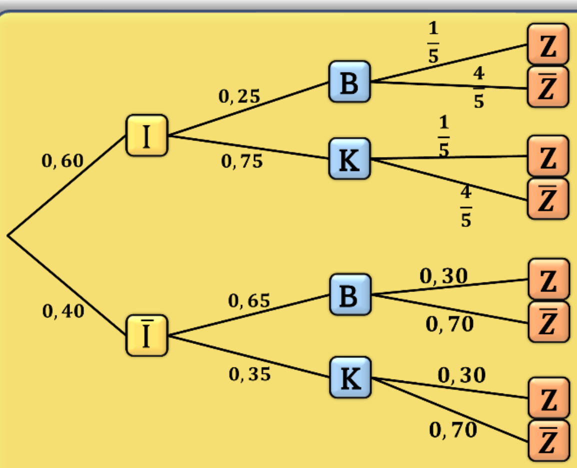
Bei 152 Personen wird Nullhypothese, dass mindestens 80% stationär einkaufen beibehalten. Die Hypothese des Beraters wird abgelehnt.

| $n = 200; p = 0{,}80;$ | | |
|---|---|---|
| $k$ | $B(n;p;k)$ | $\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$ |
| … | … | … |
| 142 | 0,00062 | 0,00149 |
| 143 | 0,00101 | 0,00250 |
| 144 | 0,00160 | 0,00410 |
| 145 | 0,00247 | 0,00657 |
| 146 | 0,00372 | 0,01028 |
| 147 | 0,00546 | 0,01575 |
| 148 | 0,00783 | 0,02357 |
| 149 | 0,01092 | 0,03450 |
| 150 | 0,01486 | 0,04935 |
| 151 | 0,01968 | 0,06903 |
| … | … | … |

Zurück zur Aufgabe

**4.0** Um ihr Angebot kontinuierlich an die Nachfrage anzupassen, hat die Besitzerin eines Hundesalons die Zusammensetzung ihres vierbeinigen Kundenstamms und die Wahl von Pflegeleistungen über einen längeren Zeitraum analysiert. Sie unterscheidet zwischen Hunden, die pflegeintensiv (I) sind, da sie z. B. ein langes Fell haben oder größer als 60 cm sind, und weniger pflegeintensiven Hunden. Sie bietet zwei unterschiedliche Pflegepakete an: das kleine Pflegeprogramm „Badetag" (B) und das große Pflegepaket „Komplettpflege" (K). Zudem kann noch eine optionale Zahnpflege (Z) dazu gebucht werden.
Bei 60 % ihrer vierbeinigen Kunden handelt es sich um pflegeintensive Hunde. Während sich drei Viertel der Besitzer eines pflegeintensiven Hundes für eine Komplettpflege entscheiden, wählen nur 35 % der Besitzer von weniger pflegeintensiven Hunden die Komplettpflege. Unabhängig davon, welches Pflegeprogramm gewählt wird, entscheidet sich ein Fünftel der Besitzer eines pflegeintensiven Hundes für eine zusätzliche Zahnpflege. Ebenfalls unabhängig vom gewählten Pflegeprogramm wird bei weniger pflegeintensiven Hunden in 70 % der Fälle keine Zahnpflege dazugebucht.
Die Feststellung der Pflegeintensität eines zufällig ausgewählten Hundes zusammen mit der Wahl von Pflegeleistungen für diesen Hund wird als Zufallsexperiment betrachtet.

**4.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments.




| $\omega$ | $(I;B;Z)$ | $(I;B;\bar{Z})$ | $(I;K;Z)$ | $(I;K;\bar{Z})$ | $(\bar{I};B;Z)$ | $(\bar{I};B;\bar{Z})$ | $(\bar{I};K;Z)$ | $(\bar{I};K;\bar{Z})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | $0{,}60\cdot 0{,}25\cdot\frac{1}{5}$ $= 0{,}03$ | 0,12 | 0,09 | 0,36 | 0,078 | 0,182 | 0,042 | 0,098 |

Zurück zur Aufgabe

**4.2** Nachfolgend finden Sie die Preisliste des in 4.0 beschriebenen Hundsalons

| | weniger pflegeintensiv | pfelgeintensiv |
|---|---|---|
| PFLEGEPAKETE | | |
| • kleines Pflegepaket „Badetag“ | 40 € | 60 € |
| • großes Pflegepaket „Komplettpflege“ | 70 € | 90€ |
| ZUSATZLEISTUNGEN | | |
| • Zahnpflege | 20 € | 30€ |

Die Zufallsgröße X gibt den Betrag in Euro an, den der Besuch eines Hundes im Hundesalon aus 4.0 kostet.

Erstellen Sie eine vollständige tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Berechnen Sie anschließend die durchschnittlichen Wocheneinnahmen des Hundesalons, wenn der Hundesalon von Montag bis Freitag geöffnet ist und die Besitzerin durchschnittlich vier Hunde pro Tag behandelt.

| $x$ | 40 | 60 | 70 | 90 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $0{,}182$ | $0{,}12+0{,}078$ $=0{,}198$ | $0{,}098$ | $0{,}36+0{,}042+0{,}03$ $=0{,}198$ | $0{,}09$ |

$E(X)=40\cdot 0{,}182+60\cdot 0{,}198+70\cdot 0{,}098+90\cdot 0{,}432+120\cdot 0{,}09=75{,}7$

Die durchschnittlichen Einnahmen des Hundesalons pro Woche betragen

$5\cdot 4\cdot 75{,}70\text{ €}=1514\text{ €}$.

Zurück zur Aufgabe