

Inhaltsverzeichnis

Teil 1: ohne Hilfsmittel - Analysis	2
1. Flächenberechnung;	2
2. Nullstellen und graphisches Ableiten;	2
3. Exponentialfunktion;	2
4. Graphisches Ableiten Richtig/Falsch Fragen;	3
Teil 1: ohne Hilfsmittel - Stochastik	4
1. Bedingte Wahrscheinlichkeit;	4
2. Binomialverteilung;	4
3. Wahrscheinlichkeitsberechnung;	4
4. Erwartungswert und Varianz von Zufallsgrößen;	4
Teil 2: mit Hilfsmittel - Analysis I	5
1. ganzrationale Funktion: Nullstellen, Extremwerte, Graph zeichnen, Flächenberechnung;	5
2. Exponentialfunktion: Aluminiumhütten;	5
Teil 2: mit Hilfsmittel - Analysis II	7
1. Ganzrationale Funktion: Funktionsterm bestimmen; Gleichung der Tangente; Wendepunkt;	7
2. Exponentialfunktion: Sauerteig;	8
3. Optimierungsaufgabe: Tauchflaschen;	8
Teil 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I	9
1. Baumdiagramm: Fußballeuropameisterschaft;	9
2. 4-Felder-Tafel: Hotel Europameisterschaft;	9
3. Binomialverteilung: Gruppenverteilung;	10
4. Zufallsgrößen: Fanshop;	10
Teil 2: mit Hilfsmittel – Stochastik II	11
1. Baumdiagramm: Zukunftspläne von Schülern;	11
2. 4-Felder-Tafel: Gap Year;	11
3. Binomialverteilte Zufallsgrößen: Babyschildkröten;	12
4. Hypothesentest und Fehler 2.Art;	12

TEIL 1: ohne Hilfsmittel - Analysis

1. Gegeben ist die quadratische Funktion $p: x \mapsto -x^2 + 1$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_p bezeichnet. Der Graph G_p und die x -Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. **(4BE)**

Lösung S.13

Lösungsvideo



- 2.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 0,5(x - 3)^2 \left(2x + \frac{4}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

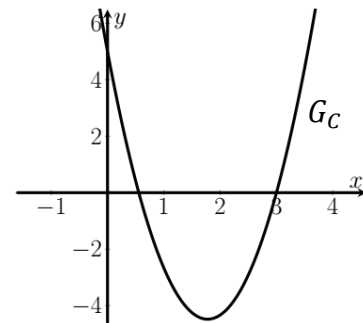
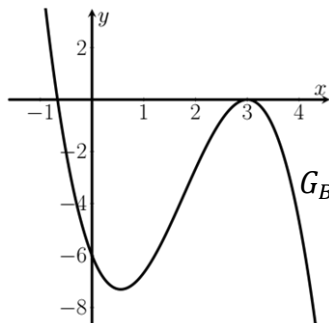
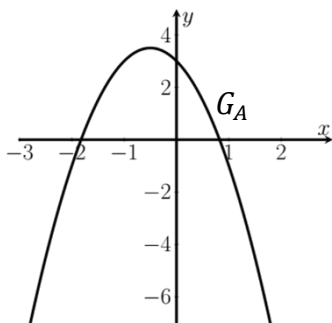
- 2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die x -Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion k liegt. **(4BE)**

Lösung S.13

Lösungsvideo



- 2.2 In der Nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen G_A , G_B und G_C von in ganz \mathbb{R} definierten Funktionen dargestellt. Entscheiden Sie begründet, welcher der drei Graphen G_A , G_B bzw. G_C zur Ableitungsfunktion von k gehört. **(3BE)**



Lösung S.14

Lösungsvideo



- 3.0 Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Funktionsgleichungen $g(x) = 2 \cdot e^x - 1$ und $h(x) = e^{2 \cdot x}$ mit den Definitionsmengen $D_g = D_h = \mathbb{R}$.

- 3.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des einzigen gemeinsamen Punktes P der Graphen der beiden Funktionen g und h . **(4BE)**

Lösung S.15

Lösungsvideo



- 3.2 Der Graph der Funktion g wird an der x -Achse gespiegelt und anschließend um zwei Einheiten entlang der y -Achse nach oben verschoben. Der daraus entstandene neue Funktionsgraph gehört zur Funktion j .

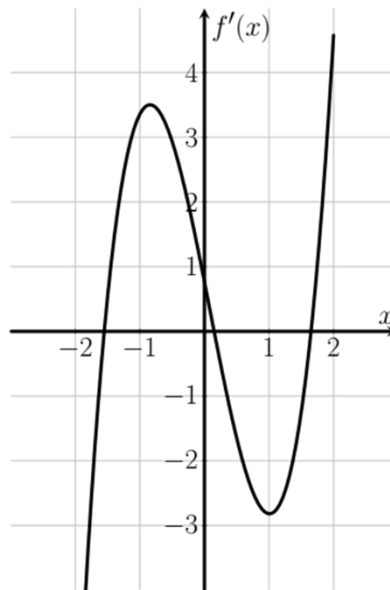
Geben Sie einen Funktionsterm der Funktion j an. **(2BE)**

Lösung S.15

Lösungsvideo



4.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$, der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz \mathbb{R} definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f .



Entscheiden Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entschieden (n) werden kann. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -1 BE und nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet. **(5BE)**

Aussage	w	f	n
$G_{f'}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_{f'}$ besitzt genau zwei Wendepunkte.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$G_{f'}$ besitzt einen globalen Tiefpunkt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
F hat genau vier Nullstellen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow \infty$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösung S.16

Lösungsvideo



$\Sigma 22$

TEIL 1: ohne Hilfsmittel - Stochastik

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert

1. Bei einer Befragung von zufällig ausgewählten Kunden eines Lebensmittelmarkts wird unter anderem untersucht, ob sie Vegetarier (V) sind bzw. ob sie in bar (B) bezahlen. Das Ergebnis der Befragung ist in der nebenstehenden Vierfeldertafel dargestellt.

	V	\bar{V}	
B	0,10	0,45	0,55
\bar{B}	0,05	0,40	0,45
	0,15	0,85	1

Untersuchen Sie, ob der Anteil der Barzahler unter den Vegetariern höher ist als der Anteil der Barzahler unter den Nicht-Vegetariern. **(3BE)**

[Lösung S.17](#) [Lösungsvideo](#)



2. Die durchgeführte Umfrage hat ebenfalls ergeben, dass 80% aller Befragten beim Einkaufen im Supermarkt eine eigene Einkaufstasche dabei haben. Betrachtet werden nun hintereinander anstehende Kunden an einer Supermarktkasse. Geben Sie für die nachfolgenden Ereignisse jeweils einen Term an, der die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das beschriebene Ereignis ermöglicht.

E_1 : „Von zehn Kunden haben genau vier eine eigene Einkaufstasche mitgebracht.“

E_2 : „Von acht Kunden kaufen nur genau die ersten zwei und der letzte Kunde ohne eigene Einkaufstasche ein.“ **(2BE)**

[Lösung S.17](#) [Lösungsvideo](#)



3. Ein zufällig ausgewählter Kunde nutzt unabhängig davon, ob er eine Einkaufstasche dabei hat oder nicht, mit der Wahrscheinlichkeit p einen Einkaufswagen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei Kunden, die nacheinander den Supermarkt betreten, genau einer einen Einkaufswagen nutzt, beträgt 32%. Geben Sie den Ansatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit p an.

Die Berechnung von p ist nicht erforderlich. **(2BE)**

[Lösung S.18](#) [Lösungsvideo](#)



- 4.0 Im Supermarkt befinden sich insgesamt drei Klassen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gleichzeitig besetzten Kassen während der Öffnungszeiten. Die folgende Tabelle zeigt die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von X :

	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,05	0,45	0,35	0,15

- 4.1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie den Wert im beschriebenen Sachzusammenhang. **(2BE)**

[Lösung S.18](#) [Lösungsvideo](#)



- 4.2 Die Varianz der Zufallsgröße X hat den Wert 0,64.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werte der Zufallsgröße X innerhalb der einfachen Standardabweichung um ihren Erwartungswert liegen. **(3BE)**

[Lösung S.18](#) [Lösungsvideo](#)



$\Sigma 12$

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f . **(3BE)**

Lösung S.20

Lösungsvideo



1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und Koordinaten aller Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzen. **(7BE)**

Lösung S.20

Lösungsvideo



1.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-3 \leq x \leq 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1\text{ cm}$ **(4BE)**

Lösung S.20

Lösungsvideo



1.4.0 Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$ besitzt in einem kartesischen Koordinatensystem den Scheitelpunkt $S(-1 | -1,5)$ und schneidet den Graphen G_f in den Punkten $A(-3 | -4,5)$ und $B(1 | -4,5)$.

1.4.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p und zeichnen Sie die zugehörige Parabel für $-3 \leq x \leq 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. **(6BE)**

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$]

Lösung S.20

Lösungsvideo



1.4.2 Die beiden Graphen G_f und G_p schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts des beschriebenen Flächenstücks. **(4BE)**

Lösung S.20

Lösungsvideo



2.0 In sogenannten Aluminiumhütten wird nach einem bestimmten Verfahren Aluminium aus Aluminiumoxid gewonnen. Die Temperatur vom Ausgangsstoff bis zum fertigen Endprodukt Aluminium während des Herstellungsprozesses kann modellhaft durch die Funktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = 250 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von T gibt die Temperatur in Grad Celsius zum Zeitpunkt t an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Berechnen Sie die Temperatur im Herstellungsprozess nach fünf Minuten und die Temperatur, welche sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt. **(4BE)**

Lösung S.20

Lösungsvideo



2.2 Beim Erreichen des Temperaturmaximums liegt Aluminium in flüssiger Form vor. Es wird mittels eines Saugrohres abgesaugt und kühlt anschließend ab.

Ermitteln Sie rechnerisch dieses Temperaturmaximum. **(7BE)**

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1 \cdot t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$]

Lösung S.20

Lösungsvideo



2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion T im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. Entnehmen Sie anschließend dem Graphen den Zeitpunkt $t_{20\text{-fach}}$, zu dem die Temperatur im Abkühlvorgang dem 20-fachen der Anfangstemperatur entspricht. **(5BE)**

Lösung S.20

Lösungsvideo



2.4 Für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion T gilt ohne Nachweis $W(20|T(20))$. Berechnen Sie $\dot{T}(20)$ und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik. **(3BE)**

Lösung S.20

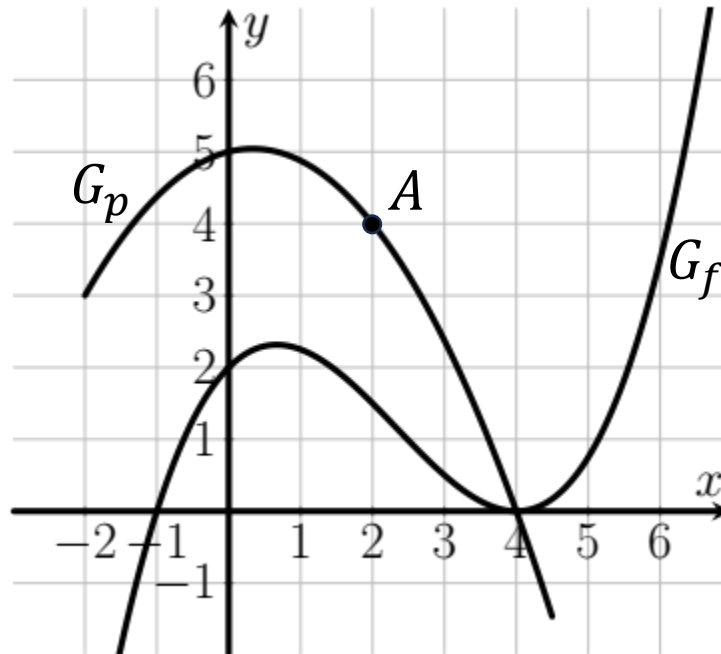
Lösungsvideo



Σ43

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II

1. Die Abbildung zeigt ausschnittsweise den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und den Graphen G_p der quadratischen Funktion $p: x \mapsto -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$.



- 1.1. Entnehmen Sie der Abbildung aus 1.0 geeignete Werte und bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f . **(3BE)**

Lösung S.28

Lösungsvideo



- 1.2.0 Die Funktion f lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$ darstellen. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.

- 1.2.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_g an G_f im Punkt $P(0|2)$. **(3BE)**

Lösung S.29

Lösungsvideo



- 1.2.2 Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen G_f eine Tangente mit der Steigung $m = -2$ angelegt werden kann. **(3BE)**

Lösung S.30

Lösungsvideo



- 1.2.3 Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Wendepunkts von G_f . **(4BE)**

Lösung S.31

Lösungsvideo



- 1.2.4 G_p (siehe Abbildung oben) und die Gerade G_h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x + 2$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ schneiden sich im Punkt $A(2|4)$. Zeichnen Sie die Gerade G_h in die obige Abbildung ein und schraffieren Sie das Flächenstück, das durch G_p , G_h und die y -Achse im I. Quadranten des Koordinatensystems eingeschlossen wird. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **(6BE)**

Lösung S.31

Lösungsvideo



2.0 Beim Backen eines Roggenbrottes kann Sauerteig als Triebmittel für den Brotteig verwendet werden. Für den Sauerteig setzt man Mehl und Wasser im selben Verhältnis zueinander an. Milchsäurebakterien in Mehl und Wasser sorgen dafür, dass im Gemisch die notwendige Milchsäure entsteht.

Ein frisch angesetzter Sauerteig besitzt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen pH-Wert (Säuregrad) von 6,0. Nach 40 Stunden hat der Sauerteig einen pH-Wert von 3,5.

Das Durchsäuern des Gemisches lässt sich näherungsweise durch die Funktion p mit der Funktionsgleichung $p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $b, k \in \mathbb{R}$ beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Stunden ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von p gibt den pH-Wert zum Zeitpunkt t an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und k . **(4BE)**

Lösung S.32

Lösungsvideo



2.2.0 Im Folgenden gilt $p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056 \cdot t}$.

2.2.1 Der Sauerteig kann ab einem pH-Wert von 4,0 dem Brotteig zugegeben werden. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, ab welchem die Zugabe des Sauerteigs möglich ist. Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Werts zu diesem Zeitpunkt. [Mögliches Teilergebnis: $\dot{p}(t) = -0,1586 \cdot e^{-0,056 \cdot t}$] **(6BE)**

Lösung S.33

Lösungsvideo



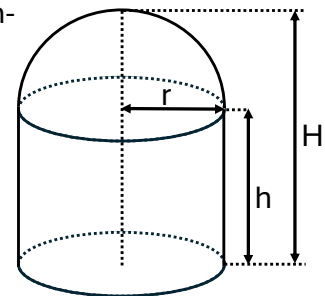
2.2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. **(4BE)**

Lösung S.33

Lösungsvideo



3.0 Ein Hersteller von Tauchflaschen plant ein neues Tauchflaschenmodell. Die Wandstärke des Materials wird vernachlässigt. Die Tauchflasche hat vereinfacht die Form eines geraden Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel (siehe Abbildung). Die Firma gibt für die Zylinderhöhe h (in dm) die Bedingung $h(r) = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$ vor. Bei den Berechnungen wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet.



Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

3.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Volumens (in dm^3) der Tauchflasche in Abhängigkeit vom Zylinderradius r (in dm) durch die Funktion V mit der Funktionsgleichung

$V(r) = -\frac{5}{6}r^3\pi + 4r\pi$ beschrieben werden kann. **(3BE)**

Lösung S.36

Lösungsvideo



3.2 Der Hersteller gibt für das neue Modell einen Radius von $0,85 dm$ bis $1,4 dm$ vor. Ermitteln Sie den Radius r , für den das Volumen der Tauchflasche maximal wird und berechnen Sie die Maßzahl dieses maximalen Volumens. **(7BE)**

Lösung S.36

Lösungsvideo



TEIL 2: mit Hilfsmittel - Stochastik I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Im Juni und Juli 2024 findet die Fußball-Europameisterschaft in Deutschland statt. Ein Tourismusunternehmen bietet für fußballbegeisterte Kunden diverse Möglichkeiten, an der Veranstaltung in Deutschland teilzunehmen. Im Nachfolgenden werden nur Kunden betrachtet, welche sich für die Fußball-Europameisterschaft interessieren. Fußballbegeisterte Kunden können bei dem Tourismusunternehmen Anreisen (A), Unterkunft (U) und Eintritt zu einem Spiel (S) buchen. 50% aller Fans buchen die Anreise. Von diesen buchen 80% gleichzeitig eine Unterkunft. Von den Fans, die eigenständig anreisen, buchen 60% eine Unterkunft. Unabhängig davon, ob die Anreise bzw. die Unterkunft beim Tourismusunternehmen gebucht oder nicht gebucht wurde, bucht ein fester Anteil aller Fans den Eintritt für den Besuch eines Spiels. Von allen Fans entscheiden sich 36% für das Komplettangebot aus Anreise mit Unterkunft und Eintritt.

Das Buchungsverhalten eines beliebig herausgegriffenen fußballbegeisterten Kunden des Tourismusunternehmens wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1. Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **(5BE)**

[Teilergebnis: $P(\{A; \bar{U}; \bar{S}\}) = 0,01$]

[Lösung S.38](#)

[Lösungsvideo](#)



1.2. Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Kunde bucht die Anreise oder den Eintritt zu einem Spiel.“

$E_2 = \{(A; U; S); (A; \bar{U}; \bar{S}); (\bar{A}; \bar{U}; S)\}$

$E_3 = \overline{E_1} \cup E_2$

Ermitteln Sie eine aufzählende Mengenschreibweise für E_3 . **(3BE)**

[Lösung S.38](#)

[Lösungsvideo](#)



2. Ein Hotel, welches zur Europameisterschaft ausschließlich mit Fans belegt ist, bietet neben den gewöhnlichen Services zwei zusätzliche Dienste an, welche die Gäste wählen können. Diese sind ein Fahrdienst zum Spiel im örtlichen Stadion (F) sowie ein Besuch des Trainingsgeländes der ansässigen Nationalmannschaft (N). Von früheren Großereignissen ist bekannt, dass drei von fünf Gästen den Fahrdienst wählen. Insgesamt entscheiden sich 50% aller Gäste für genau einen der beiden zusätzlichen Dienste. Außerdem gilt: $P_F(N) = 0,25$.

Bestimmen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, wie viele der insgesamt 400 Gäste des Hotels keinen der beiden zusätzlichen Dienste wünschen. **(5BE)**

[Lösung S.39](#)

[Lösungsvideo](#)



3. Bei der Zusammenstellung der sechs Gruppen für die Gruppenphase wurden zusätzlich die vermeintlich sechs stärksten Mannschaften zufällig per Los auf die sechs Gruppen verteilt. Diese sechs Mannschaften werden als „Gruppenköpfe“ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gruppenkopf unter den 16 Mannschaften, die ins Achtelfinale einziehen vertreten ist, beträgt $p = 0,8$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

E_4 : „Nicht alle Gruppenköpfe erreichen das Achtelfinale.“ (2BE)

Lösung S.40

Lösungsvideo



- 4.0 Ein Fanshop vor einem Stadion bietet den Fans genau die folgenden drei Artikel zum Kauf:

Artikel	Trikot	Hose	Fahne
Preis in €	100	50	10

Im Folgenden werden nur Fans betrachtet, die mindestens einen der obigen drei Artikel kaufen, wobei kein Fan denselben Artikel mehrfach kauft.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Ausgaben in Euro eines Fans im Fanshop.

Die folgende Tabelle zeigt die unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X .

x							160
$P(X = x)$	0,1	0,2	0,2	0,15	0,05	0,25	0,05

- 4.1 Vervollständigen Sie die Tabelle, indem Sie die fehlenden Zufallswerte x von links nach rechts der Größe nach aufsteigend in die obere Tabellenzeile eintragen. Berechnen Sie anschließend die durchschnittlichen Tageseinnahmen des Fanshops pro Spieltag, wenn im Fanshop mit durchschnittlich 250 Fans an einem Spieltag zu rechnen ist. (3BE)

Lösung S.41

Lösungsvideo



- 4.2 Aufgrund der zunehmenden Anzahl an umweltbewussten Fans überlegt der Inhaber des Fanshops nur noch GREEN-Label zertifizierte Trikots und Hosen anzubieten. Er müsste dafür aber die Verkaufspreise dieser Artikel deutlich erhöhen. Ein befreundeter Geschäftsmann behauptet, dass erfahrungsgemäß mindestens 80% der Fans den Preisanstieg akzeptieren würden und dadurch eine deutliche Gewinnsteigerung zu erwarten sei. Sollte dies der Fall sein, will der Inhaber des Fanshops die Umstellung wagen. Allerdings glaubt er, dass deren Anteil deutlich geringer ist (Gegenhypothese). Um eine Entscheidung zu treffen, befragt er 100 zufällig ausgewählte Fans, ob diese höheren Preise für die GREEN-Label zertifizierten Produkte in Kauf nehmen würden.

Entwickeln Sie für den Inhaber des Fanshops einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5%. Geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 75 Kunden angeben, dass sie die höheren Preise für die GREEN-Label zertifizierten Produkte akzeptieren würden. (5BE)

Lösung S.41

Lösungsvideo



Σ23

TEIL 2: mit Hilfsmittel - Stochastik II

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** An einer Fachoberschule wird eine Umfrage zu den Zukunftsplänen der Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Laut dieser Umfrage möchte nach dem Fachabitur ein Fünftel aller Befragten ein sogenanntes „GAP YEAR“ (G) machen. 70% davon haben vor, in diesem Jahr ins Ausland zu gehen (\bar{D}), alle anderen verbringen die Zeit lieber in Deutschland (D). Von denjenigen, die ins Ausland gehen, machen dort 35% Work & Travel (W), 30% ein Praktikum (P) und der Rest andere Tätigkeiten (T) wie zum Beispiel Sprachreisen, Urlaub oder arbeiten als Au-pair. Die Hälfte derer, die während ihres Gap Years in Deutschland bleiben, nutzen die Zeit für ein Praktikum und die andere Hälfte für einen Freiwilligendienst (F). Von den Befragten, die sich gegen eine Auszeit (\bar{G}) nach dem Fachabitur entscheiden, planen 40% zu studieren (S). Der Rest wird zu gleichen Teilen die dreizehnte Klasse (K) besuchen oder eine Ausbildung beginnen (A).
- Die Befragung einer zufällig ausgewählten Schülerin oder eines zufällig ausgewählten Schülers nach den Zukunftsplänen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

- 1.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des Zufallsexperiments. **(5BE)**

Lösung S.42

Lösungsvideo



- 1.2** Gegeben sind die folgenden Ereignisse:

E_1 : „Eine zufällig ausgewählte befragte Person plant ein Gap Year im Ausland.“

$E_2 = \{(G; \bar{D}; P); (G; D; P)\}$

$E_3 = \overline{E_1 \cap E_2}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_2 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_3)$. **(4BE)**

Lösung S.42

Lösungsvideo



- 2.** Die Schülerin Lena entscheidet sich für ein GAP YEAR mit Auslandsaufenthalte in Asien. Sie findet einen Job bei der Auffangstation für Meerestiere. Im Durchschnitt sind 65 von 100 behandelten Tieren in der Station Meeresschildkröten (S). Insgesamt sind 60% aller Verletzungen und Krankheiten bei Meerestieren die Folge von Plastikmüll (M) in den Ozeanen, zwei Drittel davon treten bei Meeresschildkröten auf.

Erstellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = M \cup S$ und interpretieren Sie ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. **(5BE)**

Lösung S.43

Lösungsvideo



3. Eine von Lenas Lieblingsaufgaben in der Auffangstation ist das Freilassen von Babyschildkröten an möglichst sicheren Stränden. Sie weiß jedoch, dass die Überlebenschance der Baby-Schildkröten in den ersten paar Tagen aufgrund der hohen Anzahl an Fressfeinden nur bei 10% liegt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür dass von 20 freigelassenen Schildkrötenbabys mindestens drei, aber höchstens sieben Tiere überleben. **(2BE)**

[Lösung S.44](#)

[Lösungsvideo](#)



- 4.0 Lena möchte die Reisezeit ihres Work & Travel Aufenthalts nutzen, um Tauchen zu lernen. Eine Tauchschule in Thailand macht Werbung mit der Behauptung, dass bei mindestens 70% aller Tauchgänge Meeresschildkröten beobachtet werden können. Lena vermutet allerdings, dass der Anteil deutlich geringer ist (Gegenhypothese). Um ihren Verdacht mit einem Hypothesentest zu überprüfen, befragt sie jeweils einen Teilnehmer bzw. eine Teilnehmerin von 50 verschiedenen Tauchgängen, ob Schildkröten gesehen wurden. Lena möchte sich bei der Annahme ihrer Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 3% irren.

- 4.1 Geben Sie für diesen Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn auf genau 20 Tauchgängen keine Meeresschildkröten gesehen werden. **(5BE)**

[Lösung S.44](#)

[Lösungsvideo](#)



- 4.2 Berechnen Sie für den in Teilaufgabe 4.1 entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich nur auf der Hälfte aller Tauchgänge mit der Tauchschule Meeresschildkröten gesehen werden. **(2BE)**

[Lösung S.45](#)

[Lösungsvideo](#)



Σ23

TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Analysis LÖSUNG

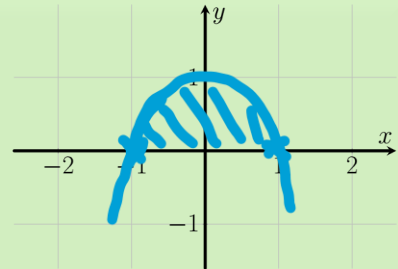
1. Gegeben ist die quadratische Funktion $p: x \mapsto -x^2 + 1$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_p bezeichnet. Der Graph G_p und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. **(4BE)**

Wir berechnen zunächst die Nullstellen:

$$p(x) = 0$$

$$-x^2 + 1 = 0 \quad | + x^2$$

$$1 = x^2 \rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1;$$



Bilden einer Stammfunktion: $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x$

$$\int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

Bilden einer Stammfunktion:

$$f(x) = c \cdot x^n$$

$$F(x) = \frac{c}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

Zurück zur Aufgabe

- 2.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 0,5(x - 3)^2 \left(2x + \frac{4}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.

- 2.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an und bestimmen Sie damit ein Intervall, in dem die x-Koordinate des lokalen Hochpunkts des Graphen der Funktion k liegt. **(4BE)**

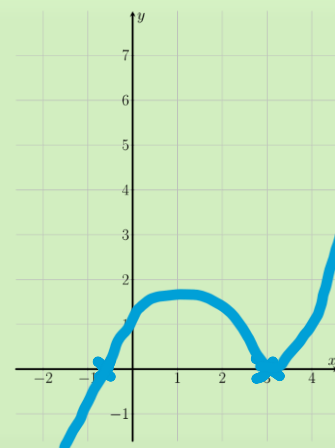
AbleSEN: $x_{1,2} = 3$ (doppelt);

$$2x + \frac{4}{3} = 0 \quad | -\frac{4}{3}$$

$$2x = -\frac{4}{3} \quad | :2$$

$$x_3 = -\frac{2}{3} \text{ (einfach)}$$

k ist eine Funktion vom Grad 3 mit positivem Leitkoeffizienten.
 → Der Graph von k verläuft von links unten nach rechts oben.
 → Der Hochpunkt liegt im Intervall $]-\frac{2}{3}; 3[$

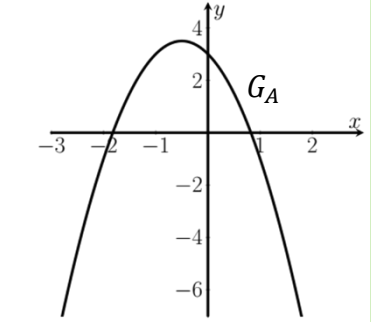
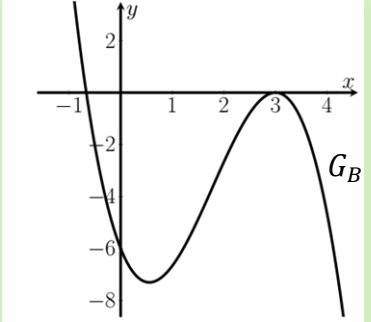
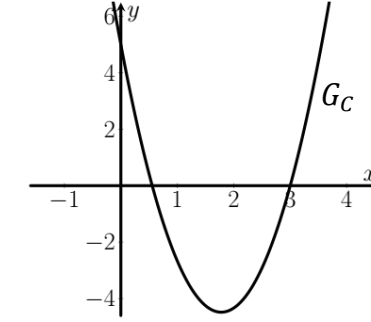


Zurück zur Aufgabe



2.2 In der Nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen G_A , G_B und G_C von in ganz \mathbb{R} definierten Funktionen dargestellt.

Entscheiden Sie begründet, welcher der drei Graphen G_A , G_B bzw. G_C zur Ableitungsfunktion von k gehört. **(3BE)**

Doppelte Nullstellen werden zu einfachen Nullstellen der Ableitungsfunktion (Kettenregel + Produktregel). Damit kommt nur G_C in Frage.

Oder: k ist eine Funktion dritten Grades. Damit muss die zugehörige Ableitungsfunktion vom Grad zwei sein, womit G_B ausscheidet.

Da der Leitkoeffizient von $k(x)$ positiv ist, kommt dessen Graph von links unten und ist somit zunächst steigend. → Der Ableitungsgraph muss von links oben kommen.

→ G_C ist der gesuchte Graph.

Zurück zur Aufgabe

3.0 Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Funktionsgleichungen $g(x) = 2 \cdot e^x - 1$ und $h(x) = e^{2 \cdot x}$ mit den Definitionsmengen $D_g = D_h = \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des einzigen gemeinsamen Punktes P der Graphen der beiden Funktionen g und h . **(4BE)**

$$g(x) = h(x)$$

$$2 \cdot e^x - 1 = e^{2 \cdot x} \quad | - 2e^x + 1$$

$$0 = e^{2 \cdot x} - 2e^x + 1$$

$$0 = (e^x)^2 - 2e^x + 1$$

$$0 = (e^x - 1)^2$$

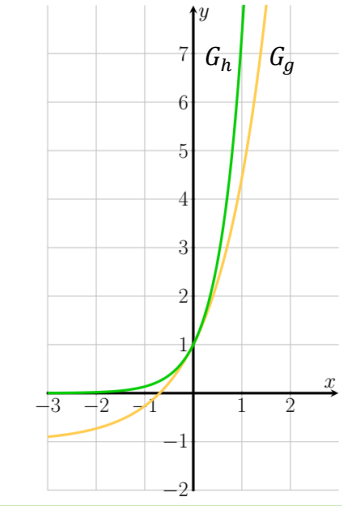
$$\rightarrow e^x = 1 \quad | \ln$$

$$x = \ln(1)$$

$$x = 0$$

Setze nun die x -Koordinate in eine der Funktionsgleichungen ein.

$$h(0) = e^{2 \cdot 0} = 1 \rightarrow P(0|1)$$



Zurück zur Aufgabe

3.2 Der Graph der Funktion g wird an der x -Achse gespiegelt und anschließend um zwei Einheiten entlang der y -Achse nach oben verschoben. Der daraus entstandene neue Funktionsgraph gehört zur Funktion j .

Geben Sie einen Funktionsterm der Funktion j an. **(2BE)**

$$g(x) = 2 \cdot e^x - 1$$

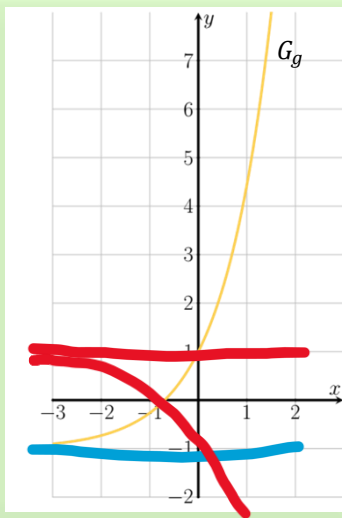
Spiegelung an der x -Achse: Leikoeffizient ändert sein Vorzeichen.

Da der Graph um -1 nach unten verschoben ist, ist der gespiegelte Graph um $+1$ nach oben verschoben.

\rightarrow Term: $-2 \cdot e^x + 1$

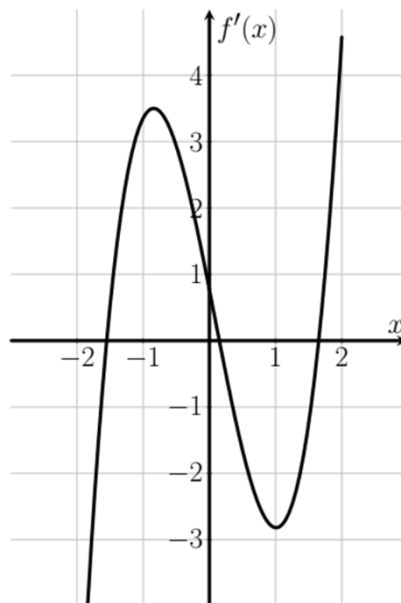
Verschiebung um zwei Einheiten entlang der y -Achse nach oben:
Addition von $+2$ zum Funktionsterm.

$\rightarrow j(x) = -2e^x + 3$



Zurück zur Aufgabe

4.0 Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$, der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz \mathbb{R} definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Funktion F bezeichne eine Stammfunktion von f .



Entscheiden Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entschieden (n) werden kann. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte -1 BE und nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet. **(5BE)**

Aussage	w	f	n
$G_{f'}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		X	
$G_{f'}$ besitzt genau zwei Wendepunkte.	X		
$G_{f'}$ besitzt einen globalen Tiefpunkt.	X		
F hat genau vier Nullstellen.			X
Für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow \infty$	X		

Zurück zur Aufgabe

TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Stochastik LÖSUNG

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert

1. Bei einer Befragung von zufällig ausgewählten Kunden eines Lebensmittelmarkts wird unter anderem untersucht, ob sie Vegetarier (V) sind bzw. ob sie in bar (B) bezahlen. Das Ergebnis der Befragung ist in der nebenstehenden Vierfeldertafel dargestellt.

	V	\bar{V}	
B	0,10	0,45	0,55
\bar{B}	0,05	0,40	0,45
	0,15	0,85	1

Untersuchen Sie, ob der Anteil der Barzahler unter den Vegetariern höher ist als der Anteil der Barzahler unter den Nicht-Vegetariern. (3BE)

$$P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{0,10}{0,15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$P_{\bar{V}}(B) = \frac{P(\bar{V} \cap B)}{P(\bar{V})} = \frac{0,45}{0,85} = \frac{45}{85} = \frac{9}{17}$$

Der Anteil der Barzahler ist unter den Vegetariern höher.

Zurück zur Aufgabe

2. Die durchgeführte Umfrage hat ebenfalls ergeben, dass 80% aller Befragten beim Einkaufen im Supermarkt eine eigene Einkaufstasche dabei haben. Betrachtet werden nun hintereinander anstehende Kunden an einer Supermarktkasse.

Geben Sie für die nachfolgenden Ereignisse jeweils einen Term an, der die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das beschriebene Ereignis ermöglicht.

E_1 : „Von zehn Kunden haben genau vier eine eigene Einkaufstasche mitgebracht.“

E_2 : „Von acht Kunden kaufen nur genau die ersten zwei und der letzte Kunde ohne eigene Einkaufstasche ein.“ (2BE)

$$P(E_1) = \binom{10}{4} \cdot 0,80^4 \cdot 0,20^6$$

$$P(E_2) = 0,2^2 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2$$

$$P(E_2) = 0,2^3 \cdot 0,8^5$$

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$



Zurück zur Aufgabe



3. Ein zufällig ausgewählter Kunde nutzt unabhängig davon, ob er eine Einkaufstasche dabei hat oder nicht, mit der Wahrscheinlichkeit p einen Einkaufswagen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei Kunden, die nacheinander den Supermarkt betreten, genau einer einen Einkaufswagen nutzt, beträgt 32%. Geben Sie den Ansatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit p an.

Die Berechnung von p ist nicht erforderlich. **(2BE)**

$$\binom{2}{1} p \cdot (1 - p) = 0,32$$

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Zurück zur Aufgabe

- 4.0 Im Supermarkt befinden sich insgesamt drei Kassen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gleichzeitig besetzten Kassen während der Öffnungszeiten. Die folgende Tabelle zeigt die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von X :

	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,05	0,45	0,35	0,15

- 4.1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie den Wert im beschriebenen Sachzusammenhang. **(2BE)**

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 \\ &= 0,45 + 0,70 + 0,45 \\ &= 1,60 \end{aligned}$$

Durchschnittlich sind 1,60 Kassen gleichzeitig besetzt.

Zurück zur Aufgabe

- 4.2 Die Varianz der Zufallsgröße X hat den Wert 0,64.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werte der Zufallsgröße X innerhalb der einfachen Standardabweichung um ihren Erwartungswert liegen. **(3BE)**

Berechnung der Standardabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{64}{100}} = 0,8$

$$E(X) - \sigma(X) = 1,6 - 0,8 = 0,8$$

$$E(X) + \sigma(X) = 1,6 + 0,8 = 2,4$$

	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,05	0,45	0,35	0,15

$$P(0,8 < X < 2,4) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,8$$

Zurück zur Aufgabe



TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I LÖSUNG

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f . **(3 BE)**

$$-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0 \quad (x^2 \text{ ausklammern})$$

$$x^2\left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\right) = 0$$

1. $x_{1,2} = 0$ (doppelt)

2. $-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = 0$

$$x_{3,4} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-1} = -2 \text{ (doppelt)}$$

Zurück zur Aufgabe

1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und Koordinaten aller Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzen. **(7 BE)**

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x$$

$$f'(x) = -2x^3 - 6x^2 - 4x$$

$$-2x^3 - 6x^2 - 4x = 0 \text{ (x ausklammern)}$$

$$x(-2x^2 - 6x - 4) = 0$$

$x_1 = 0$ (einfach, Vorzeichenwechsel = VZW)

$$-2x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{-4}$$

$x_2 = -2$ (einfach, VZW); $x_3 = -1$ (einfach, VZW);

Ableitungsregel:

$$f(x) = c \cdot x^n$$

$$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Vorzeichentabelle:

x		$x = -2$		$x = -1$		$x = 0$	(1)
$f'(x)$	+++	0	---	0	+++	0	---
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗	HOP	↘

Füllen der Vorzeichentabelle:

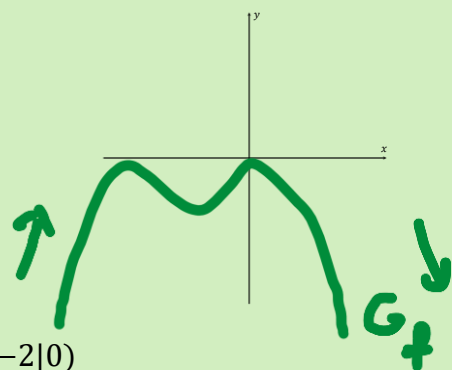
1. Möglichkeit: Probewert einsetzen

$$f'(1) = -2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -12 < 0$$

2. Möglichkeit: Globalverlauf von G_f

f ist Funktion vom Grad 4 mit negativem Leitkoeffizient

→ G_f geht von links unten nach rechts unten



Bestimmen der y-Koordinaten:

$$f(-2) = 0 \text{ (siehe Aufgabe 1.1)} \rightarrow \text{absoluter HOP bei } H_1(-2|0)$$

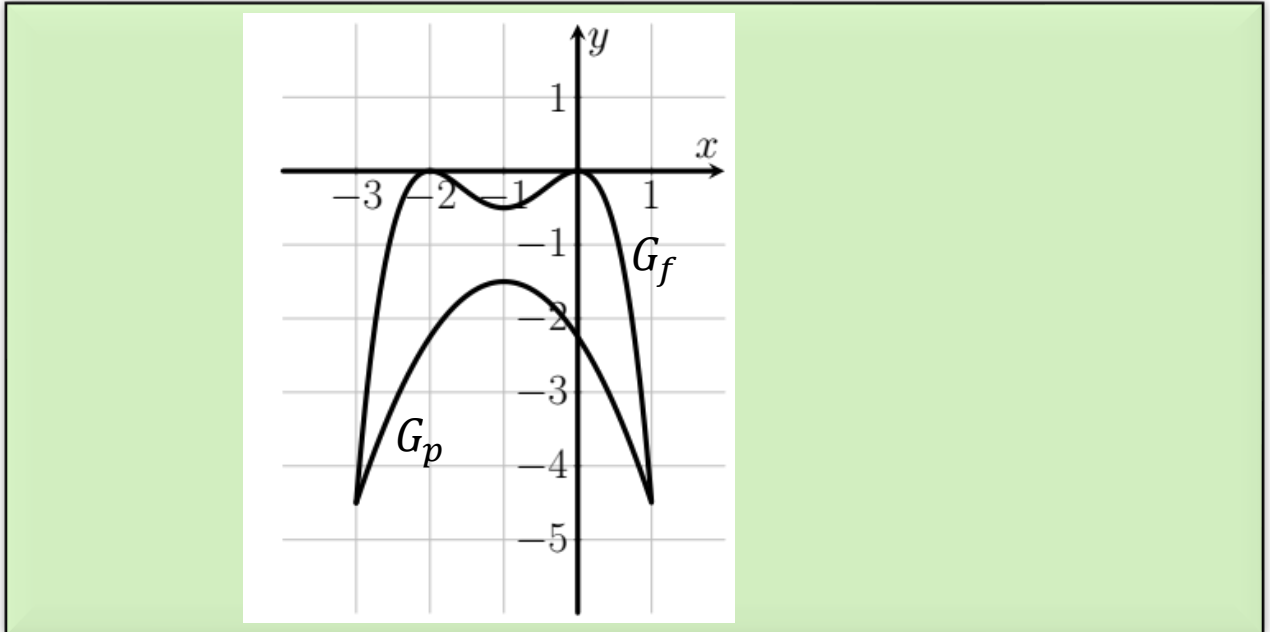
$$f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{relativer TIP bei } T_1(-1 | -\frac{1}{2})$$

$$f(0) = 0 \text{ (siehe Aufgabe 1.1)} \rightarrow \text{absoluter HOP bei } H_2(0|0)$$

Zurück zur Aufgabe



- 1.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-3 \leq x \leq 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1\text{ cm}$ (4 BE)



Zurück zur Aufgabe

1.4.0 Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$ besitzt in einem kartesischen Koordinatensystem den Scheitelpunkt $S(-1 | -1,5)$ und schneidet den Graphen G_f in den Punkten $A(-3 | -4,5)$ und $B(1 | -4,5)$.

1.4.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p und zeichnen Sie die zugehörige Parabel für $-3 \leq x \leq 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. **(6 BE)**

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$]

1. Möglichkeit: Verwenden der Scheitelpunktform

$$p(x) = a(x + 1)^2 - 1,5$$

Einsetzen der Koordinaten von A oder B .

$$-4,5 = a \cdot (1 + 1)^2 - 1,5$$

$$-4,5 = a \cdot 2^2 - 1,5 \quad | + 1,5$$

$$-3 = a \cdot 4 \quad | : 4$$

$$-\frac{3}{4} = a \quad \rightarrow p(x) = -\frac{3}{4}(x + 1)^2 - 1,5 \quad (\text{Parabel vergleiche 1.3})$$

2. Möglichkeit: Aufstellen und Lösen eines 3x3 Gleichungssystems

Allgemeine Parabelgleichung: $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$(I) \quad -1,5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$

$$(II) \quad -4,5 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c$$

$$(III) \quad -4,5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$(I) \quad -1,5 = a - b + c \quad \rightarrow c = -a + b - 1,5$$

$$(II) \quad -4,5 = 9a - 3b + c$$

$$(III) \quad -4,5 = a + b + c$$

c in (II) und (III)

$$(II)' \quad -4,5 = 9a - 3b - a + b - 1,5$$

$$(III)' \quad -4,5 = a + b - a + b - 1,5$$

$$(II)' \quad -4,5 = 8a - 2b - 1,5$$

$$(III)' \quad -4,5 = 2b - 1,5 \quad \rightarrow 2b = -3 \rightarrow b = -1,5$$

b in (II)'

$$(II)'' \quad -4,5 = 8a - 2 \cdot (-1,5) - 1,5$$

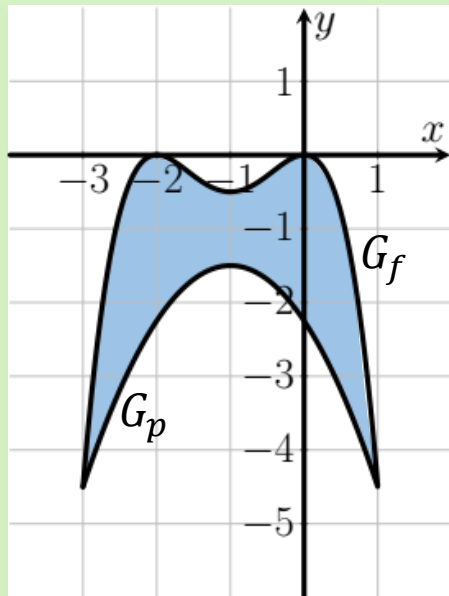
$$-4,5 = 8a + 1,5 \quad | - 1,5$$

$$-6 = 8a \quad | : 8$$

$$-\frac{3}{4} = a \rightarrow c = -\left(-\frac{3}{4}\right) - 1,5 - 1,5 = -2,25 \rightarrow p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 1,5x - 2,25$$

Zurück zur Aufgabe

- 1.4.2** Die beiden Graphen G_f und G_p schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts des beschriebenen Flächenstücks. (4 BE)



Eine Stammfunktion bilden:

$$h(x) = c \cdot x^n$$

$$H(x) = c \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-3}^1 (f(x) - p(x)) dx = \\
 &= \int_{-3}^1 \left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 - \left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \right) \right) dx = \\
 &= \int_{-3}^1 \left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \right) dx = \\
 &= \int_{-3}^1 \left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \right) dx = \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}x^5 - 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \right]_{-3}^1 = \\
 &= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x \right]_{-3}^1 * \\
 &= \frac{119}{60} - \left(-\frac{99}{20} \right) = \frac{104}{15}
 \end{aligned}$$

* Nebenrechnung:

$$-\frac{1}{10} \cdot 1^5 - \frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{5}{12} \cdot 1^3 + \frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{9}{4} \cdot 1 = \frac{119}{60}$$

$$-\frac{1}{10} \cdot (-3)^5 - \frac{1}{2} \cdot (-3)^4 - \frac{5}{12} \cdot (-3)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-3)^2 + \frac{9}{4} \cdot (-3) = -\frac{99}{20}$$

Zurück zur Aufgabe

2.0 In sogenannten Aluminiumhütten wird nach einem bestimmten Verfahren Aluminium aus Aluminiumoxid gewonnen. Die Temperatur vom Ausgangsstoff bis zum fertigen Endprodukt Aluminium während des Herstellungsprozesses kann modellhaft durch die Funktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = 250 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von T gibt die Temperatur in Grad Celsius zum Zeitpunkt t an. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Berechnen Sie die Temperatur im Herstellungsprozess nach fünf Minuten und die Temperatur, welche sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt. **(4 BE)**

Temperatur nach 5 Minuten:

$$T(5) = 250 \cdot 5 \cdot e^{-0,1 \cdot 5} + 22 \approx 780,16 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Antwort: Die Temperatur beträgt nach 5 Minuten ca. 780 °C.

Langfristige Temperatur:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{250 \cdot t}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,1 \cdot t}}_{\rightarrow 0} + 22 = 22 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Fachwissen:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\overset{+\infty}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\overset{-\infty}{-x}} = 0$$

Fachwissen:

$$e^x \text{ vs } x^n$$

Nach diesem Modell stellt sich theoretisch langfristig eine Temperatur von 22 °C ein.

Zurück zur Aufgabe

2.2 Beim Erreichen des Temperaturmaximums liegt Aluminium in flüssiger Form vor. Es wird mittels eines Saugrohres abgesaugt und kühlt anschließend ab.

Ermitteln Sie rechnerisch dieses Temperaturmaximum. **(7 BE)**

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1 \cdot t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$]

$$T(t) = 250t \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 22$$

Schrittweise:

$$u(t) = 250t$$

$$v(t) = e^{-0,1t}$$

$$u'(t) = 250$$

$$v'(t) = e^{-0,1t} \cdot (-0,1)$$

$$T'(t) = 250 \cdot e^{-0,1t} + 250t \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1)$$

Ausklammern:

$$T'(t) = e^{-0,1t} (250 + 250t \cdot (-0,1))$$

$$T'(t) = e^{-0,1t} (250 - 25t)$$

$$0 = \underbrace{e^{-0,1t}}_{>0} (250 - 25t)$$

$$0 = 250 - 25t \quad | + 25t$$

$$25t = 250 \quad | : 25$$

$$t = 10$$

Ableitungsregel:

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

In Worten:

Ableiten Mal **abschreiben** plus
abschreiben Mal **ableiten**.

Ableitungsregel:

$$v(x) = e^{g(x)}$$

$$v'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

In Worten:

Exponentialfunktion **abschreiben**
 Mal **Nachdifferenzieren**

VZT:

$PW(1)$

	$t = 0$	$0 < t < 10$	$t = 10$	$10 < t < \infty$
$T'(x)$	+	+++	0	---
G_T	RandTIP	↗	HOP	↘

$$T(10) = 250 \cdot 10 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} + 22 \approx 941,70$$

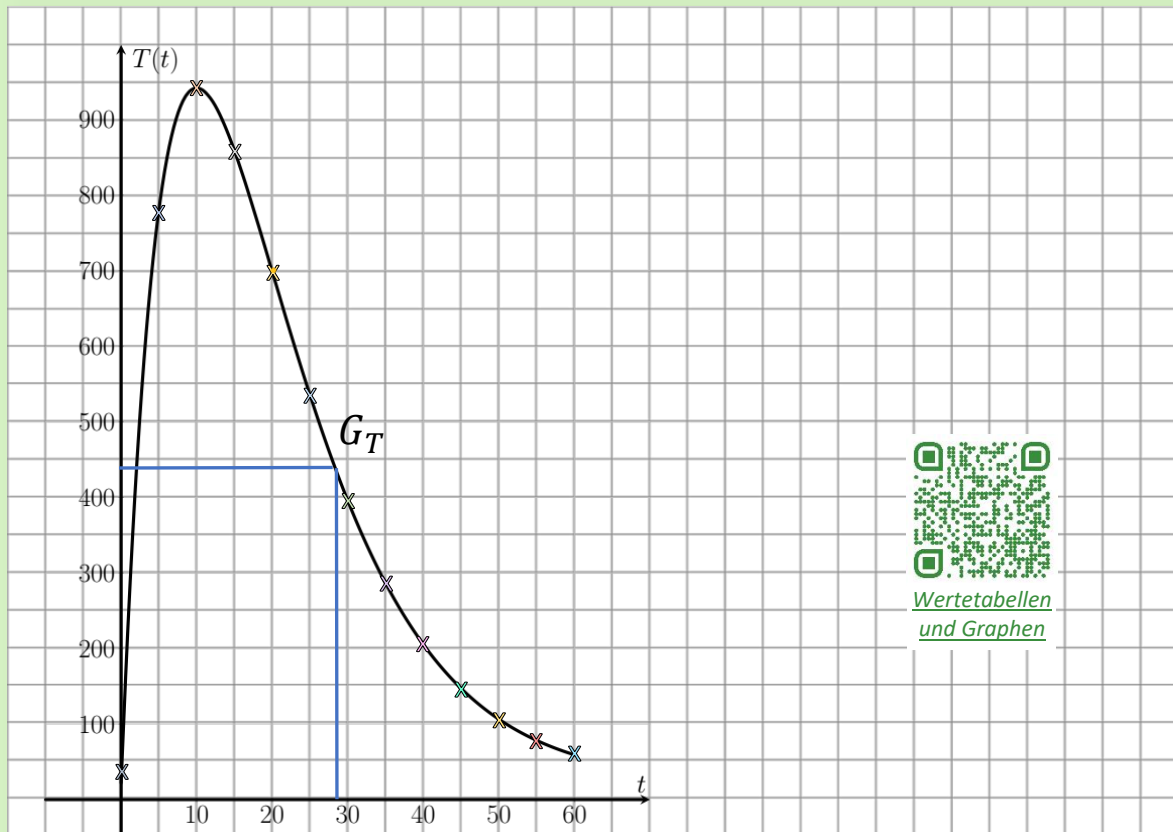
Das Temperaturmaximum beträgt etwa 942 °C.

Zurück zur Aufgabe

2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion T im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. Entnehmen Sie anschließend dem Graphen den Zeitpunkt $t_{20-fach}$, zu dem die Temperatur im Abkühlvorgang dem 20-fachen der Anfangstemperatur entspricht. **(5BE)**

Wertetabelle im TR:

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$T(t)$	22	780	942	859	699	535	395	286	205	147	106	78	59



$$T(0) = 22 \rightarrow T_{20-fach} = 20 \cdot 22 = 440$$

$$t_{20-fach} \approx 28 \text{ [min]}$$

Zurück zur Aufgabe

2.4 Für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion T gilt ohne Nachweis $W(20|T(20))$. Berechnen Sie $\dot{T}(20)$ und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik. **(3 BE)**

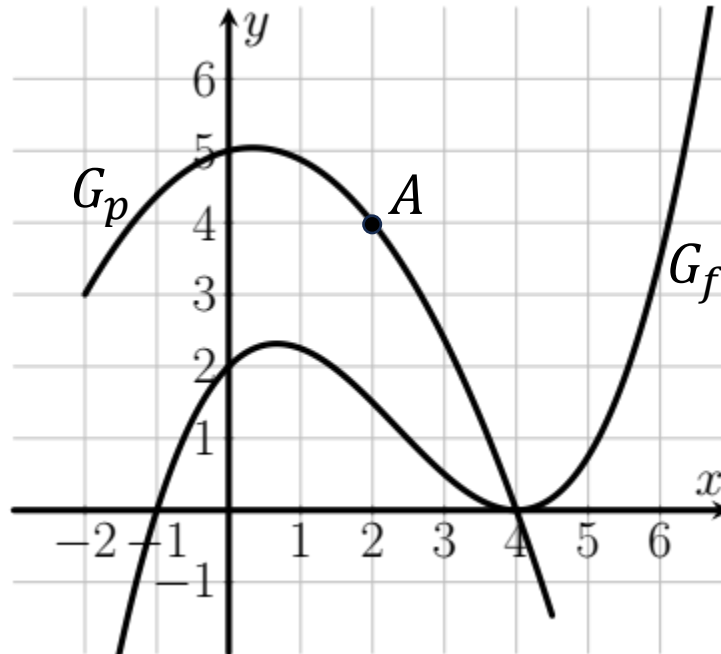
$$\dot{T}(20) = 250 \cdot e^{-0,1 \cdot 20} - 25 \cdot 20 \cdot e^{-0,1 \cdot 20} \approx -33,8$$

Das ist die Stelle der stärksten Temperaturabnahme mit ca. $-33,8 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{min}}$.

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II LÖSUNG

1. Die Abbildung zeigt ausschnittsweise den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und den Graphen G_p der quadratischen Funktion $p: x \mapsto -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$.



- 1.1 Entnehmen Sie der Abbildung aus 1.0 geeignete Werte und bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f . (3BE)

Information: f ist vom Grad 3.

G_f schneidet die x -Achse an der Stelle $x = -1$.
 $\rightarrow f$ hat hier eine Nullstelle mit Vielfachheit eins.

G_f berührt die x -Achse an der Stelle $x = 4$.
 $\rightarrow f$ hat hier eine Nullstelle mit Vielfachheit zwei.

Wir können also mit der Produktform von f ansetzen:

(Allgemein: $f(x) = a(x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \dots$)

$$f(x) = a \cdot (x + 1)^1 \cdot (x - 4)^2$$

Um a zu bestimmen, setzen wir noch die Koordinaten eines Punktes der auf G_f liegt in die Funktionsgleichung ein. $P(0|2)$

$$2 = a \cdot (0 + 1) \cdot (0 - 4)^2$$

$$2 = a \cdot 1 \cdot 16 \quad | :16$$

$$\frac{1}{8} = a$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{8}(x + 1)(x - 4)^2$$

Zurück zur Aufgabe

1.2.0 Die Funktion f lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$ darstellen. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.

1.2.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_g an G_f im Punkt $P(0|2)$. **(3BE)**

1. Möglichkeit:

$$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8)$$

$$m_g = f'(0) = \frac{1}{8}(3 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 8) = 1$$

Allgemeine Geradengleichung: $y = mx + t$

$$\rightarrow y = 1 \cdot x + t$$

Wir setzen die Koordinaten des Punktes P ein, um t zu bestimmen.

$$2 = 1 \cdot 0 + t \rightarrow t = 2$$

$$\rightarrow g(x) = x + 2$$

2. Möglichkeit:

Einsetzen in die allgemeine Tangentengleichung.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Da es um den Punkt $P(0|2)$ geht, ist hier $x_0 = 0$

$$f'(0) = \frac{1}{8}(3 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 8) = 1$$

$$f(0) = \frac{1}{8}(0^3 - 7 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 16) = 2$$

$$\rightarrow y = 1 \cdot (x - 0) + 2$$

$$y = x + 2$$

Ableitungsfunktion bilden:

$$h(x) = c \cdot x^n$$

$$h'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Zurück zur Aufgabe

1.2.2 Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen G_f eine Tangente mit der Steigung $m = -2$ angelegt werden kann. **(3BE)**

$$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8)$$

$$-2 = \frac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8)$$

$$-2 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{14}{8}x + 1 \quad | + 2$$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{4}x + 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-\left(-\frac{14}{8}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot 3}}{2 \cdot \frac{3}{8}}$$

$$D = \left(-\frac{7}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot 3 = -\frac{23}{16} < 0 \quad \rightarrow \text{keine Lösung}$$

→ Es gibt keinen Punkt des Graphen G_f an dem eine Tangente mit der Steigung $m = -2$ angelegt werden kann.

Ableitungsfunktion bilden:

$$h(x) = c \cdot x^n$$

$$h'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Zurück zur Aufgabe

1.2.3 Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Wendepunkts von G_f . (4BE)

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 14x + 8)$$

$$f''(x) = \frac{1}{8}(6x - 14)$$

$$0 = \frac{1}{8}(6x - 14) \quad | \cdot 8$$

$$0 = 6x - 14 \quad | + 14$$

$$14 = 6x \quad | : 6$$

$$x = \frac{14}{6} \quad (\text{einfach, Vorzeichenwechsel})$$

→ G_f hat eine Wendestelle bei $x = \frac{14}{6}$

$$f\left(\frac{14}{6}\right) = \frac{1}{8}\left(\left(\frac{14}{6}\right)^3 - 7\left(\frac{14}{6}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{14}{6}\right) + 16\right) = \frac{125}{108}$$

→ $W\left(\frac{14}{6} \mid \frac{125}{108}\right)$

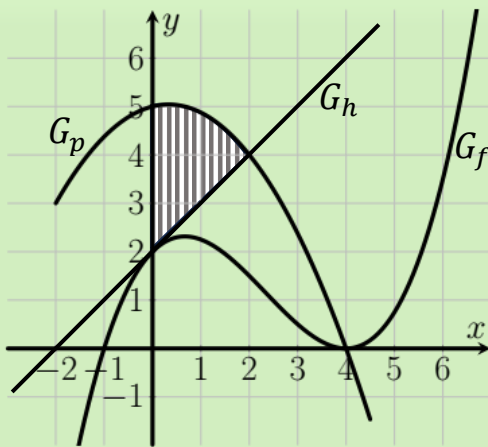
Ableitungsfunktion bilden:

$$h(x) = c \cdot x^n$$

$$h'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Zurück zur Aufgabe

1.2.4 G_p (siehe Abbildung oben) und die Gerade G_h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x + 2$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ schneiden sich im Punkt $A(2|4)$. Zeichnen Sie die Gerade G_h in die obige Abbildung ein und schraffieren Sie das Flächenstück, das durch G_p , G_h und die y -Achse im I. Quadranten des Koordinatensystems eingeschlossen wird. **(6BE)**



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 (p(x) - h(x)) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5 - (x + 2) \right) dx \\
 &= \int_0^2 \left(-\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5 - x - 2 \right) dx \\
 &= \int_0^2 \left(-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 \right) dx \\
 &= \left[-\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_0^2 \text{ (Stammfunktion)} \\
 &= \left[-\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 3x \right]_0^2 \\
 &= \frac{7}{2} - 0 \\
 &= \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion bilden:

$$h(x) = c \cdot x^n$$

$$H(x) = c \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

* Nebenrechnung:

$$-\frac{1}{8} \cdot 2^3 - \frac{3}{8} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = \frac{7}{2}$$

$$-\frac{1}{8} \cdot 0^3 - \frac{3}{8} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$$

Zurück zur Aufgabe



2.0 Beim Backen eines Roggenbrottes kann Sauerteig als Triebmittel für den Brotteig verwendet werden. Für den Sauerteig setzt man Mehl und Wasser im selben Verhältnis zueinander an. Milchsäurebakterien in Mehl und Wasser sorgen dafür, dass im Gemisch die notwendige Milchsäure entsteht.

Ein frisch angesetzter Sauerteig besitzt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen pH-Wert (Säuregrad) von 6,0. Nach 40 Stunden hat der Sauerteig einen pH-Wert von 3,5.

Das Durchsäuern des Gemisches lässt sich näherungsweise durch die Funktion p mit der Funktionsgleichung $p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $b, k \in \mathbb{R}$ beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Stunden ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von p gibt den pH-Wert zum Zeitpunkt t an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und k . (4BE)

$$p(t) = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$(I) \quad 6,0 = 3,2 + b \cdot \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_{=1} \quad \rightarrow 6,0 = 3,2 + b \quad \rightarrow b = 2,8$$

$$(II) \quad 3,5 = 3,2 + b \cdot e^{-k \cdot 40}$$

b in (II) einsetzen:

$$3,5 = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-k \cdot 40} \quad | - 3,2$$

$$0,3 = 2,8 \cdot e^{-k \cdot 40} \quad | : 2,8$$

$$\frac{3}{28} = e^{-k \cdot 40} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{3}{28}\right) = -k \cdot 40 \quad | : 40$$

$$-k = \frac{\ln\left(\frac{3}{28}\right)}{40} \quad | \cdot (-1)$$

$$k = -\frac{\ln\left(\frac{3}{28}\right)}{40} \approx 0,056$$

Zurück zur Aufgabe

2.2.0 Im Folgenden gilt $p(t) = 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056 \cdot t}$.

2.2.1 Der Sauerteig kann ab einem pH-Wert von 4,0 dem Brotteig zugegeben werden. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, ab welchem die Zugabe des Sauerteigs möglich ist. Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Werts zu diesem Zeitpunkt. [Mögliches Teilergebnis: $p'(t) = -0,1586 \cdot e^{-0,056 \cdot t}$] **(6BE)**

$$\begin{aligned}
 p(t) &= 4 \\
 4 &= 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056 \cdot t} \quad | - 3,2 \\
 0,8 &= 2,8 \cdot e^{-0,056 \cdot t} \quad | : 2,8 & y = e^x \\
 \frac{2}{7} &= e^{-0,056 \cdot t} \quad | \ln & x = \ln(y) \\
 \ln\left(\frac{2}{7}\right) &= -0,056 \cdot t \quad | : (-0,056) \\
 t &= \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{-0,056} \approx 22,37 \text{ [h]}
 \end{aligned}$$

Die Zugabe des Sauerteigs ist nach ca. 22,4 Stunden möglich.

Berechnung der Abnahmegeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= 3,2 + 2,8 \cdot e^{-0,056 \cdot t} \\
 p'(t) &= 2,8 \cdot e^{-0,056 \cdot t} \cdot (-0,056) \\
 p'(t) &= -0,1568 \cdot e^{-0,056 \cdot t} \\
 p'(22,37) &= -0,1568 \cdot e^{-0,056 \cdot 22,37} \\
 p'(22,37) &\approx -0,045
 \end{aligned}$$

Ableitungsregel:

$$v(x) = c \cdot e^{g(x)}$$

$$v'(x) = c \cdot e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

In Worten:

Exponentialfunktion abschreiben

Mal Nachdifferenzieren

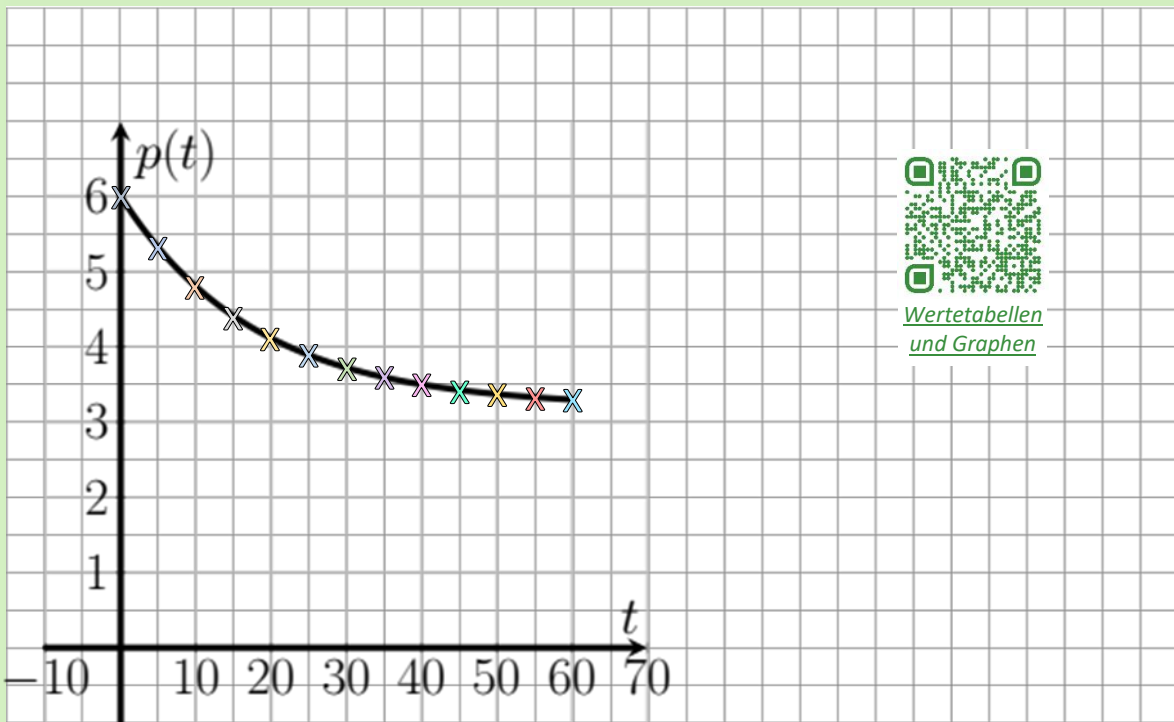
Die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Werts zu diesem Zeitpunkt beträgt ca. $-0,045$ pro Stunde.

Zurück zur Aufgabe

2.2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. **(4BE)**

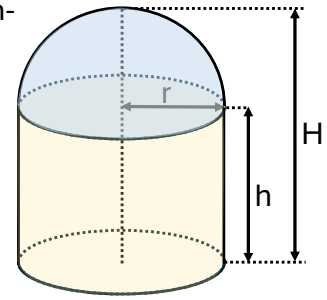
Wertetabelle im TR:

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$p(t)$	6	5,32	4,80	4,41	4,11	3,89	3,72	3,59	3,50	3,43	3,37	3,33	3,30



Zurück zur Aufgabe

- 3.0** Ein Hersteller von Tauchflaschen plant ein neues Tauchflaschenmodell. Die Wandstärke des Materials wird vernachlässigt. Die Tauchflasche hat vereinfacht die Form eines geraden Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel (siehe Abbildung). Die Firma gibt für die Zylinderhöhe h (in dm) die Bedingung $h(r) = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$ vor. Bei den Berechnungen wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet.



Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

- 3.1** Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Volumens (in dm^3) der Tauchflasche in Abhängigkeit vom Zylinderradius r (in dm) durch die Funktion V mit der Funktionsgleichung

$$V(r) = -\frac{5}{6}r^3\pi + 4r\pi \text{ beschrieben werden kann. (3BE)}$$

Hauptbedingung: $V(r, h) = \underbrace{r^2\pi h}_{\text{Zylinder}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} r^3\pi}_{\text{Halbkugel}}$

$$V(r, h) = r^2\pi h + \frac{2}{3}r^3\pi$$

Nebenbedingung: $h(r) = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$

Zielfunktion: $V(r) = r^2\pi \left(\frac{4}{r} - \frac{3r}{2} \right) + \frac{2}{3}r^3\pi$

$$= 4r\pi - \frac{3}{2}r^3\pi + \frac{2}{3}r^3\pi$$

$$= -\frac{5}{6}r^3\pi + 4r\pi$$

Zurück zur Aufgabe

3.2 Der Hersteller gibt für das neue Modell einen Radius von $0,85 \text{ dm}$ bis $1,4 \text{ dm}$ vor. Ermitteln Sie den Radius r , für den das Volumen der Tauchflasche maximal wird und berechnen Sie die Maßzahl dieses maximalen Volumens. **(7BE)**

$$V(r) = -\frac{5}{6}r^3\pi + 4r\pi \quad D = [0,85; 1,4]$$

$$V'(r) = -\frac{5}{6} \cdot 3r^2\pi + 4\pi$$

$$V'(r) = -\frac{5}{2}r^2\pi + 4\pi$$

$$0 = -\frac{5}{2}r^2\pi + 4\pi \quad | +\frac{5}{2}r^2\pi$$

$$\frac{5}{2}r^2\pi = 4\pi \quad | :\left(\frac{5}{2}\pi\right)$$

$$r^2 = \frac{8}{5} \quad |\sqrt{\quad}$$

$$r = \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1,26 \in D \text{ (einfach, Vorzeichenwechsel)}$$

Ableitungsregel:

$$f(x) = c \cdot x^n$$

$$f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$$

VZT:

	$0,85 < r < \sqrt{\frac{8}{5}}$	$r = \sqrt{\frac{8}{5}}$	$r < \infty$
$V'(r)$	+++	0	---
G_V	↗	HOP	↘

→ G_V hat einen absoluten Hochpunkt an der Stelle $r = \sqrt{\frac{8}{5}}$.

$$V_{max} = V\left(\sqrt{\frac{8}{5}}\right) = -\frac{5}{6} \cdot \left(\sqrt{\frac{8}{5}}\right)^3 \pi + 4 \cdot \left(\sqrt{\frac{8}{5}}\right) \cdot \pi \approx 10,60$$

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I LÖSUNG

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Im Juni und Juli 2024 findet die Fußball-Europameisterschaft in Deutschland statt. Ein Tourismusunternehmen bietet für fußballbegeisterte Kunden diverse Möglichkeiten, an der Veranstaltung in Deutschland teilzunehmen. Im Nachfolgenden werden nur Kunden betrachtet, welche sich für die Fußball-Europameisterschaft interessieren.

Fußballbegeisterte Kunden können bei dem Tourismusunternehmen Anreisen (A), Unterkunft (U) und Eintritt zu einem Spiel (S) buchen. 50% aller Fans buchen die Anreise. Von diesen buchen 80% gleichzeitig eine Unterkunft. Von den Fans, die eigenständig anreisen, buchen 60% eine Unterkunft. Unabhängig davon, ob die Anreise bzw. die Unterkunft beim Tourismusunternehmen gebucht oder nicht gebucht wurde, bucht ein fester Anteil aller Fans den Eintritt für den Besuch eines Spiels. Von allen Fans entscheiden sich 36% für das Komplettangebot aus Anreise mit Unterkunft und Eintritt.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. (5BE)

[Teilergebnis: $P(\{A; \bar{U}; \bar{S}\}) = 0,01$]

$P(\{A; U; S\}) = 0,50 \cdot 0,80 \cdot x$
 $0,36 = 0,50 \cdot 0,80 \cdot x$
 $0,36 = 0,40 \cdot x \quad | : 0,40$
 $x = \frac{36}{40}$
 $x = 0,9$

ω	$(A; U; S)$	$(A; U; \bar{S})$	$(A; \bar{U}; S)$	$(A; \bar{U}; \bar{S})$	$(\bar{A}; U; S)$	$(\bar{A}; U; \bar{S})$	$(\bar{A}; \bar{U}; S)$	$(\bar{A}; \bar{U}; \bar{S})$
$P(\{\omega\})$	0,36	$0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,04$	$0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,09$	$0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,01$	$0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,27$	$0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,1 = 0,03$	$0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,9 = 0,18$	$0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,1 = 0,02$

Zurück zur Aufgabe

1.2 Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Kunde bucht die Anreise oder den Eintritt zu einem Spiel.“

$$E_2 = \{(A; U; S); (A; \bar{U}; \bar{S}); (\bar{A}; \bar{U}; S)\}$$

$$E_3 = \overline{E_1} \cup E_2$$

Ermitteln Sie eine aufzählende Mengenschreibweise für E_3 . **(3BE)**

$$E_1 = \{(A; U; S), (A; U; \bar{S}), (A; \bar{U}; S), (A; \bar{U}; \bar{S}), (\bar{A}; U; S), (\bar{A}; \bar{U}; S)\}$$

1. Möglichkeit:

$$\overline{E_1} = \{(\bar{A}; U; \bar{S}), (\bar{A}; \bar{U}; \bar{S})\}$$

$$\overline{E_1} \cup E_2 = \{(A; U; S), (A; \bar{U}; \bar{S}), (\bar{A}; \bar{U}; S), (\bar{A}; U; \bar{S}), (\bar{A}; \bar{U}; \bar{S})\}$$

$$\overline{E_1} \cup E_2 = \{(A; U; \bar{S}), (A; \bar{U}; S), (\bar{A}; U; S)\}$$

2. Möglichkeit:

$$E_3 = \overline{E_1} \cup E_2 = E_1 \cap \overline{E_2} \text{ (Gesetze von DeMorgan)}$$

$$E_1 = \{(A; U; S), (A; U; \bar{S}), (A; \bar{U}; S), (A; \bar{U}; \bar{S}), (\bar{A}; U; S), (\bar{A}; \bar{U}; S)\}$$

$$\overline{E_2} = \{(A; U; \bar{S}), (A; \bar{U}; S), (\bar{A}; U; S), (\bar{A}; U; \bar{S}), (\bar{A}; \bar{U}; \bar{S})\}$$

$$E_1 \cap \overline{E_2} = \{(A; U; \bar{S}), (A; \bar{U}; S), (\bar{A}; U; S)\}$$

Zurück zur Aufgabe

2. Ein Hotel, welches zur Europameisterschaft ausschließlich mit Fans belegt ist, bietet neben den gewöhnlichen Services zwei zusätzliche Dienste an, welche die Gäste wählen können. Diese sind ein Fahrdienst zum Spiel im örtlichen Stadion (F) sowie ein Besuch des Trainingsgeländes der ansässigen Nationalmannschaft (N). Von früheren Großereignissen ist bekannt, dass drei von fünf Gästen den Fahrdienst wählen. Insgesamt entscheiden sich 50% aller Gäste für genau einen der beiden zusätzlichen Dienste. Außerdem gilt: $P_F(N) = 0,25$.

Bestimmen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, wie viele der insgesamt 400 Gäste des Hotels keinen der beiden zusätzlichen Dienste wünschen. **(5BE)**

	F	\bar{F}	Σ
N	0,15	0,05	0,20
\bar{N}	0,45	0,35	0,80
Σ	0,6	0,4	1

$P(F \cap \bar{N}) + P(\bar{F} \cap N) = 0,50$
 $P_F(N) = 0,25$

$P_F(N) = \frac{P(F \cap N)}{P(F)}$

$\rightarrow P(F \cap N) = P_F(N) \cdot P(F)$
 $= 0,25 \cdot 0,6 = 0,15$

$P(\bar{F} \cap N) = 0,50 - P(F \cap N)$
 $P(\bar{F} \cap N) = 0,50 - 0,15 = 0,35$

$P(\bar{F} \cap \bar{N}) = 0,35$
 Anzahl = $400 \cdot 0,35 = 140$

Zurück zur Aufgabe

3. Bei der Zusammenstellung der sechs Gruppen für die Gruppenphase wurden zusätzlich die vermeintlich sechs stärksten Mannschaften zufällig per Los auf die sechs Gruppen verteilt. Diese sechs Mannschaften werden als „Gruppenköpfe“ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gruppenkopf unter den 16 Mannschaften, die ins Achtelfinale einziehen vertreten ist, beträgt $p = 0,8$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

E_4 : „Nicht alle Gruppenköpfe erreichen das Achtelfinale.“ **(2BE)**

$P(E_4) = 1 - P(\text{"kein Gruppenkopf kommt ins Achtelfinale"}) = 1 - 0,8^6 = 0,737856$

Zurück zur Aufgabe

4.0 Ein Fanshop vor einem Stadion bietet den Fans genau die folgenden drei Artikel zum Kauf:

Artikel	Trikot	Hose	Fahne
Preis in €	100	50	10

Im Folgenden werden nur Fans betrachtet, die mindestens einen der obigen drei Artikel kaufen, wobei kein Fan denselben Artikel mehrfach kauft.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Ausgaben in Euro eines Fans im Fanshop.

Die folgende Tabelle zeigt die unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X .

x	10	50	60	100	110	150	160
$P(X = x)$	0,1	0,2	0,2	0,15	0,05	0,25	0,05

4.1 Vervollständigen Sie die Tabelle, indem Sie die fehlenden Zufallswerte x von links nach rechts der Größe nach aufsteigend in die obere Tabellenzeile eintragen. Berechnen Sie anschließend die durchschnittlichen Tageseinnahmen des Fanshops pro Spieltag, wenn im Fanshop mit durchschnittlich 250 Fans an einem Spieltag zu rechnen ist. **(3BE)**

Durchschnittliche Einnahmen pro Fan (Erwartungswert):

$$E(X) = 10 \cdot 0,1 + 50 \cdot 0,2 + 60 \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,15 + 110 \cdot 0,05 + 150 \cdot 0,25 + 160 \cdot 0,05 = 89$$

Durchschnittliche Tageseinnahmen:

$$250 \cdot 89 = 22250 \text{ [€]}$$

Zurück zur Aufgabe

4.2 Aufgrund der zunehmenden Anzahl an umweltbewussten Fans überlegt der Inhaber des Fanshops nur noch GREEN-Label zertifizierte Trikots und Hosen anzubieten. Er müsste dafür aber die Verkaufspreise dieser Artikel deutlich erhöhen. Ein befreundeter Geschäftsmann behauptet, dass erfahrungsgemäß mindestens 80% der Fans den Preisanstieg akzeptieren würden und dadurch eine deutliche Gewinnsteigerung zu erwarten sei. Sollte dies der Fall sein, will der Inhaber des Fanshops die Umstellung wagen. Allerdings glaubt er, dass deren Anteil deutlich geringer ist (Gegenhypothese). Um eine Entscheidung zu treffen, befragt er 100 zufällig ausgewählte Fans, ob diese höheren Preise für die GREEN-Label zertifizierten Produkte in Kauf nehmen würden.

Entwickeln Sie für den Inhaber des Fanshops einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5%. Geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 75 Kunden angeben, dass sie die höheren Preise für die GREEN-Label zertifizierten Produkte akzeptieren würden. **(5BE)**

X = "Anzahl an Fans, die den Preisanstieg akzeptieren würden."

$$H_0: p \geq 0,80$$

$$H_1: p < 0,80 \text{ (linksseitiger Hypothesentest)}$$

$$n = 100$$

$$\bar{A} = \{0; 1; 2; \dots; k\} \quad A = \{k + 1; \dots; 100\}$$

$$\alpha = 0,05$$

$$P_{0,80}^{100}(\{0; 1; 2; \dots; k\}) \leq 0,05$$

$$\sum_{i=0}^k B(100; 0,80; i) \leq 0,05$$

TW

$$\rightarrow k_{max} = 72$$

$$\bar{A} = \{0; 1; 2; \dots; 72\} \quad A = \{73; \dots; 100\}$$

Wenn 75 Kunden angeben, dass sie die höheren Preise akzeptieren würden, wird die Nullhypothese angenommen.

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik II LÖSUNG

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 An einer Fachoberschule wird eine Umfrage zu den Zukunftsplänen der Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Laut dieser Umfrage möchte nach dem Fachabitur ein Fünftel aller Befragten ein sogenanntes „GAP YEAR“ (G) machen. 70% davon haben vor, in diesem Jahr ins Ausland zu gehen (\bar{D}), alle anderen verbringen die Zeit lieber in Deutschland (D). Von denjenigen, die ins Ausland gehen, machen dort 35% Work & Travel (W), 30% ein Praktikum (P) und der Rest andere Tätigkeiten (T) wie zum Beispiel Sprachreisen, Urlaub oder arbeiten als Au-pair. Die Hälfte derer, die während ihres Gap Years in Deutschland bleiben, nutzen die Zeit für ein Praktikum und die andere Hälfte für einen Freiwilligendienst (F). Von den Befragten, die sich gegen eine Auszeit (\bar{G}) nach dem Fachabitur entscheiden, planen 40% zu studieren (S). Der Rest wird zu gleichen Teilen die dreizehnte Klasse (K) besuchen oder eine Ausbildung beginnen (A).

Die Befragung einer zufällig ausgewählten Schülerin oder eines zufällig ausgewählten Schülers nach den Zukunftsplänen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des Zufallsexperiments. (5BE)

ω	$(G; D; P)$	$(G; D; F)$	$(G; \bar{D}; W)$	$(G; \bar{D}; P)$	$(G; \bar{D}; T)$	$(\bar{G}; S)$	$(\bar{G}; K)$	$(\bar{G}; A)$
$P(\{\omega\})$	$0,20 \cdot 0,3$ $\cdot 0,50$ $= 0,03$	$0,2 \cdot 0,3$ $\cdot 0,5 =$ $0,03$	$0,2 \cdot 0,7$ $\cdot 0,35 =$ $0,049$	$0,2 \cdot 0,7$ $\cdot 0,3 =$ $0,042$	$0,2 \cdot 0,7$ $\cdot 0,35 =$ $0,049$	$0,8$ $\cdot 0,4 =$ $0,32$	$0,8$ $\cdot 0,3$ $=$ $0,24$	$0,8$ $\cdot 0,3$ $=$ $0,24$

Zurück zur Aufgabe

1.2 Gegeben sind die folgenden Ereignisse:

E_1 : „Eine zufällig ausgewählte befragte Person plant ein Gap Year im Ausland.“

$$E_2 = \{(G; \bar{D}; P); (G; D; P)\}$$

$$E_3 = \overline{E_1 \cap E_2}$$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_2 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_3)$. **(4BE)**

ω	$(G; D; P)$	$(G; D; F)$	$(G; \bar{D}; W)$	$(G; \bar{D}; P)$	$(G; \bar{D}; T)$	$(\bar{G}; S)$	$(\bar{G}; K)$	$(\bar{G}; A)$
$P(\{\omega\})$	$0,20 \cdot 0,3$ $\cdot 0,50$ $= 0,03$	$0,2 \cdot 0,3$ $\cdot 0,5 =$ $0,03$	$0,2 \cdot 0,7$ $\cdot 0,35 =$ $0,049$	$0,2 \cdot 0,7$ $\cdot 0,3 =$ $0,042$	$0,2 \cdot 0,7$ $\cdot 0,35 =$ $0,049$	$0,8$ $\cdot 0,4 =$ $0,32$	$0,8$ $\cdot 0,3$ $=$ $0,24$	$0,8$ $\cdot 0,3$ $=$ $0,24$

$$E_1 = \{(G; \bar{D}; W); (G; \bar{D}; P); (G; \bar{D}; T)\}$$

E_2 : „Eine zufällig ausgewählte befragte Person macht ein Praktikum.“

1. Möglichkeit:

$$E_1 \cap E_2 = \{(G; \bar{D}; P)\}$$

Das ist genau das Gegenereignis zu $\overline{E_1 \cap E_2}$. Man kann hier auch die Wahrscheinlichkeit von $(G; \bar{D}; P)$ berechnen und das von 100% abziehen.

$$P(E_3) = P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - P(E_1 \cap E_2) = 1 - P(G; \bar{D}; P) = 1 - 0,042 = 0,958$$

2. Möglichkeit:

$$E_1 \cap E_2 = \{(G; \bar{D}; P)\}$$

$$\begin{aligned} \overline{E_1 \cap E_2} &= \{(G; D; P); (G; D; F); (G; \bar{D}; W); (G; \bar{D}; T); (\bar{G}; S); (\bar{G}; K); (\bar{G}; A)\} \\ &= 0,03 + 0,03 + 0,049 + 0,049 + 0,32 + 0,24 + 0,24 \\ &= 0,958 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

2. Die Schülerin Lena entscheidet sich für ein GAP YEAR mit Auslandsaufenthalte in Asien. Sie findet einen Job bei der Auffangstation für Meerestiere. Im Durchschnitt sind 65 von 100 behandelten Tieren in der Station Meeresschildkröten (S). Insgesamt sind 60% aller Verletzungen und Krankheiten bei Meerestieren die Folge von Plastikmüll (M) in den Ozeanen, zwei Drittel davon treten bei Meeresschildkröten auf.

Erstellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = M \cup S$ und interpretieren Sie ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (5BE)

	M	\bar{M}	Σ
S	0,40	0,25	0,65
\bar{S}	0,20	0,15	0,35
Σ	0,60	0,40	1

$$\frac{2}{3} \text{ von } 60\%: \frac{2}{3} \cdot 0,60 = 0,40$$

$$\begin{aligned} P(E_4) &= P(M \cup S) = \\ &= 0,40 + 0,25 + 0,20 \\ &= 0,85 \end{aligned}$$

Interpretation: $P(M \cup S)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tier auf der Auffangstation eine Meeresschildkröte ist oder die Verletzung oder Krankheit die Folge von Plastikmüll ist.

Zurück zur Aufgabe

3. Eine von Lenas Lieblingsaufgaben in der Auffangstation ist das Freilassen von Babyschildkröten an möglichst sicheren Stränden. Sie weiß jedoch, dass die Überlebenschance der Baby-Schildkröten in den ersten paar Tagen aufgrund der hohen Anzahl an Fressfeinden nur bei 10% liegt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür dass von 20 freigelassenen Schildkrötenbabs mindestens drei, aber höchstens sieben Tiere überleben. **(2BE)**

$$\begin{aligned}
 P_{0,10}^{20}(3 \leq X \leq 7) &= \sum_{i=3}^7 B(20; 0,10; i) \\
 &= \sum_{i=0}^7 B(20; 0,10; i) - \sum_{i=0}^2 B(20; 0,10; i) \\
 &= 0,99958 - 0,67693 \\
 &= 0,32265
 \end{aligned}$$

$n = 20; p = 0,10;$		
k	$B(n; p; k)$	$\sum_{i=0}^k B(n; p; k)$
0	0,12158	0,12158
1	0,27017	0,39175
2	0,28518	0,67693
3	0,19012	0,86705
4	0,08978	0,95683
5	0,03192	0,98875
6	0,00887	0,99761
7	0,00197	0,99958
8	0,00036	0,99994
9	0,00005	0,99999
10	0,00001	1,00000

Zurück zur Aufgabe

4.0 Lena möchte die Reisezeit ihres Work & Travel Aufenthalts nutzen, um Tauchen zu lernen. Eine Tauchschule in Thailand macht Werbung mit der Behauptung, dass bei mindestens 70% aller Tauchgänge Meeresschildkröten beobachtet werden können. Lena vermutet allerdings, dass der Anteil deutlich geringer ist (Gegenhypothese). Um ihren Verdacht mit einem Hypothesentest zu überprüfen, befragt sie jeweils einen Teilnehmer bzw. eine Teilnehmerin von 50 verschiedenen Tauchgängen, ob Schildkröten gesehen wurden. Lena möchte sich bei der Annahme ihrer Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 3% irren.

4.1 Geben Sie für diesen Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn auf genau 20 Tauchgängen keine Meeresschildkröten gesehen werden. (5BE)

Testgröße:

$X =$ „Anzahl an Tauchgängen, bei denen Meeresschildkröten gesehen wurden unter 50.“

$H_0: p \geq 0,70$ $H_1: p < 0,70$ (linksseitiger Hypothesentest)

$A = \{k + 1; \dots; 50\}$ $\bar{A} = \{0; 1; 2; \dots; k\}$

Verschiedene Schreibweisen:

$$P_{0,70}^{50}(X \in \{0; 1; 2; \dots; k\}) \leq 0,03$$

$$P_{0,70}^{50}(X \leq k) \leq 0,03$$

$$\sum_{i=0}^{50} B(50; 0,70; i) \leq 0,03$$

TF

$$\rightarrow k_{max} = 28$$

$A_{max} = \{29; \dots; 50\}$ $\bar{A}_{max} = \{0; 1; 2; \dots; 28\}$

Wenn bei 20 Tauchgängen keine Meeresschildkröten gesehen werden, dann werden bei 30 Tauchgängen Meeresschildkröten gesehen und dieser Wert ist im Annahmebereich.

Damit wird die Nullhypothese angenommen.

$n = 50; p = 0,70;$		
k	$B(n; p; k)$	$\sum_{i=0}^k B(n; p; i)$
...
24	0,00059	0,00093
25	0,00144	0,00237
26	0,00322	0,00559
27	0,00668	0,01228
28	0,01281	0,02509
29	0,02268	0,04776
30	0,03704	0,08480
...

Zurück zur Aufgabe

4.2 Berechnen Sie für den in Teilaufgabe **4.1** entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich nur auf der Hälfte aller Tauchgänge mit der Tauchschule Meeresschildkröten gesehen werden. **(2BE)**

Fehler zweiter Art:

Wert im Annahmereich tritt ein, obwohl die Gegenhypothese stimmt.

$$P_{0,50}^{50}(X \in \{29; \dots; 50\}) = 1 - P_{0,50}^{50}(X \in \{0; \dots; 28\})$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{28} B(50; 0,50; i)$$

$$\approx 1 - 0,83888$$

$$= 0,16112$$

$n = 50; p = 0,50;$		
k	$B(n; p; k)$	$\sum_{i=0}^k B(n; p; i)$
...
24	0,10796	0,44386
25	0,11228	0,55614
26	0,10796	0,66409
27	0,09596	0,76006
28	0,07883	0,83888
29	0,05980	0,89868
30	0,04186	0,94054
...

Zurück zur Aufgabe