

Lehrwerk: Quadratische Funktionen

Autor: Hügel Rudolf

Hügel-Schule



Inhaltsverzeichnis

01 Quadratische Ergänzung	3
02 Einführung quadratischer Funktionen	8
03 Scheitelpunktform quadratischer Funktionen	11
04 Spiegelung, Streckung, Stauchung und Verschiebung von Parabeln	16
05 Lösungsformel für quadratische Gleichungen	19
06 Nullstellenform quadratischer Funktionen	26
07 Quadratische Funktionsgleichungen bestimmen.....	29
08 Quadratische Funktionen mit Parameter.....	30

01 Arbeitsblatt: Quadratische Ergänzung

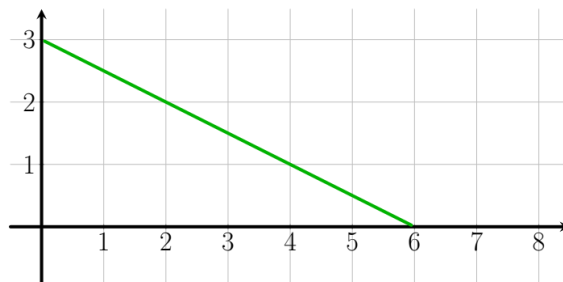
Zusammenfassen: Wende eine binomische Formel an und fasse anschließend zusammen.



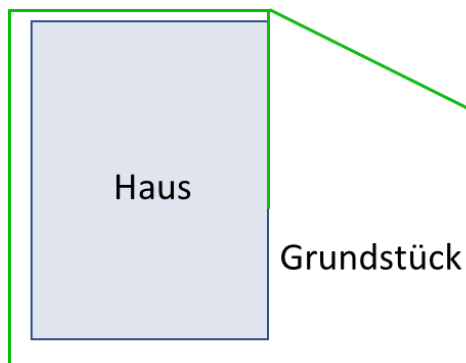
Entscheide, für welchen Wert von x der Term einen Extremwert erhält und gib diesen Wert an. Gib begründet an, ob es sich um einen Maximalwert oder einen Minimalwert handelt.



Zeichne die korrekte Fläche in das Bild, um Karl Friedrich eine entsprechende Lösung zu präsentieren.



Aufgabe 2 Überlege dir bessere Orte, als den von Carl Friedrich gewählten, für flächeneinhaltsgleiche Beete.



01 Infomaterial: Quadratische Ergänzung

Bei der quadratischen Ergänzung geht es darum, einen quadratischen Term so umzuwandeln, dass man seinen höchsten oder geringsten Wert bestimmen kann.

Beispiel: $T(x) = -0,25x^2 + 2x + 1$

Setzt man bei diesem Term für x bestimmte Werte ein, dann erhält man davon abhängig entsprechende y -Werte.

Für $x = -2$ erhält man beispielsweise $T(-2) = -0,25 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 = -4$.

Für $x = 1$ erhält man $T(1) = -0,25 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2,75$.

Für $x = 10$ erhält man $T(8) = -0,25 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 1 = 1$.

Um nun bestimmen zu können für welche x -Wert der Termwert maximal wird, also für welchen x -Wert der größte y -Wert entsteht, kann man wie folgt vorgehen.

Schritt 1: Klammere den Leitkoeffizienten aus.

$$T(x) = -0,25x^2 + 2x + 1$$

$$T(x) = -0,25(x^2 - 8x - 4)$$

(Hinweis: Klammert man einen Wert aus, dann kann man den entsprechenden Summanden durch diesen Wert teilen. Z.B. $2x: (-0,25) = -8x$ und deswegen ergibt das Ausklammern von $-0,25$ an dieser Stelle $-8x$. Multipliziert man wieder aus, dann erkennt man, dass wieder das Ursprüngliche herauskommt.)

Schritt 2: Zerlege den Koeffizienten vor x so, dass ein Produkt mit dem Faktor 2 entsteht.

(„Rechne 2 Mal Koeffizient durch 2“)

$$T(x) = -0,25(x^2 - 8x - 4)$$

$$T(x) = -0,25(x^2 - 2 \cdot 4x - 4)$$

(Hinweis: Das macht man, da man später eine der binomischen Formeln $-a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ – anwenden möchte)

Schritt 3: Führe die quadratische Ergänzung durch.

(Hinweis: Mit der quadratischen Ergänzung ist nun gemeint, dass man diesen Ausdruck noch dazu addiert, der nötig ist, um die Komponenten einer der binomischen Formeln zu erhalten. Da man einen Ausdruck nicht einfach ohne weiteres dazu addieren kann, muss ihn anschließend auch wieder abziehen.

$$T(x) = -0,25(x^2 - 2 \cdot 4x - 4)$$

$$T(x) = -0,25(x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2 - 4) \text{ (Anwenden der binomischen Formel)}$$

$$T(x) = -0,25((x - 4)^2 - 4^2 - 4)$$

$$T(x) = -0,25((x - 4)^2 - 20)$$

Zusammenfassen: Fasse zusammen und finde den Maximalwert.

(Hinweis: Nun kann die äußere Klammer noch aufgelöst werden)

$$T(x) = -0,25((x - 4)^2 - 20)$$

$$T(x) = -0,25(x - 4)^2 + 5$$

Da der Ausdruck $(x - 4)^2$ immer größer oder gleich 0 ist, ist der Grenzwert – der kleinste Wert, der hier herauskommen kann – die 0. Diesen Wert erhält man für $x = 4$. Deswegen erhält man den Maximalwert für den Term bei $x = 4$. Der Maximalwert ergibt dann eingesetzt genau die additive Konstante. $\rightarrow T_{max} = T(4) = -0,25(4 - 4)^2 + 5 = 5$.

01 Übungen: Quadratische Ergänzung

Aufgabe 1 Gegeben sind die folgenden quadratischen Terme.

(1) $2x^2 - 4x + 8$

(2) $-2x^2 - 8x + 3$

(3) $x^2 + 3x + 5$

(4) $0,5x^2 - 4x + 2$

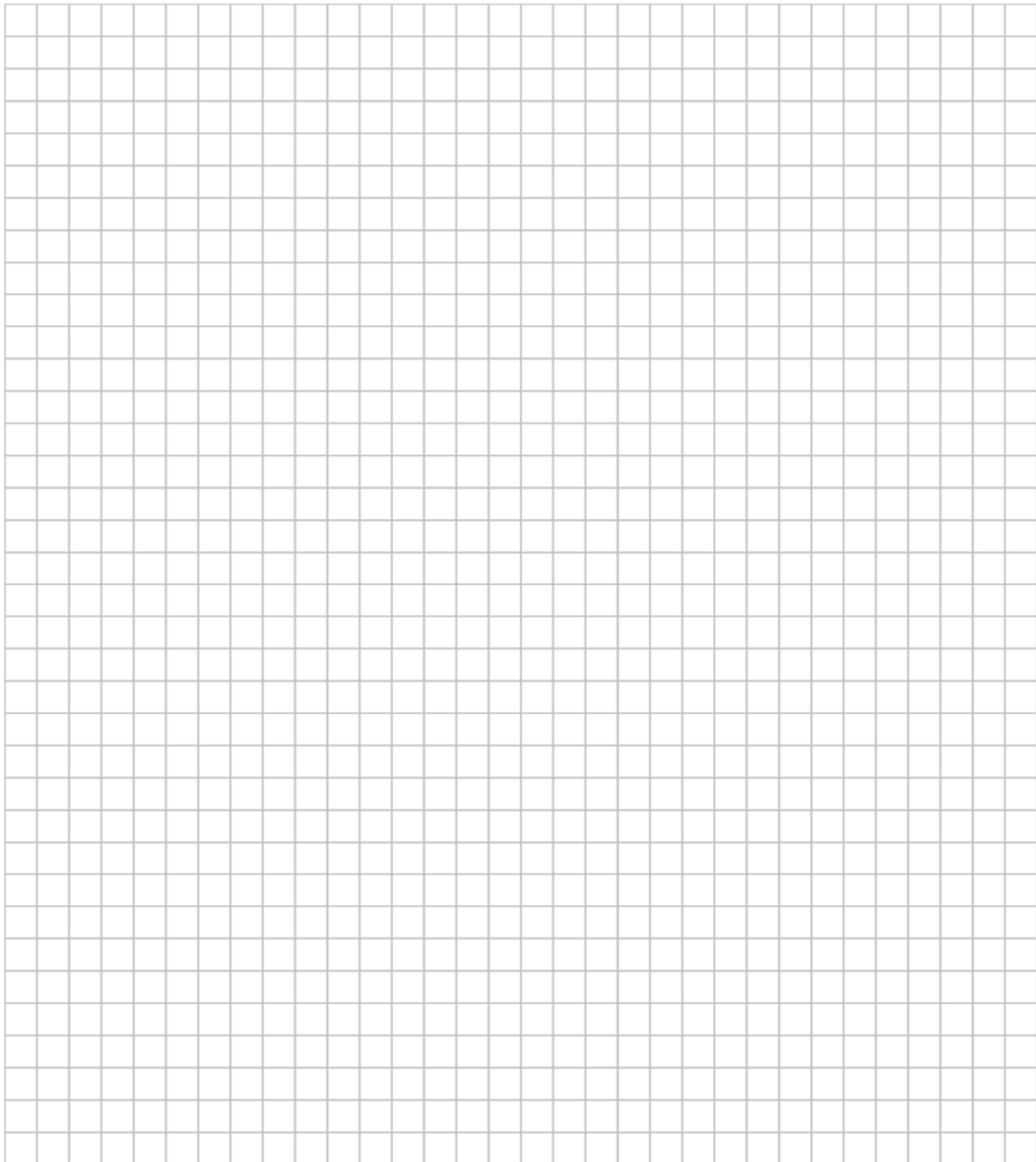
(5) $0,3x^2 + x + 5$

(6) $-0,25x^2 + 3x$

(7) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$

(8) $3x^2 + 12$

- a) Entscheide jeweils, ob mithilfe von quadratischer Ergänzung ein Maximalwert oder ein Minimalwert bestimmt werden kann.
- b) Führe die quadratische Ergänzung durch.
- c) Gib den x-Wert an für den der Term maximal/minimal wird und gib den zugehörigen Termwert an.



Aufgabe 2 Der Veranstalter eines Festivals möchte mithilfe des Eintritts maximale Einnahmen machen. Verlangt er zu wenig Eintritt besteht die Gefahr, dass er zu wenig Gewinn macht und er durch die hohen Kosten des Festivals Verluste macht. Bei zu hohen Eintrittspreisen besteht jedoch die gleiche Gefahr, da das Festival dann zu wenige Besucher haben könnte.

Der Term $T(x) = -10x^2 + 2000x$ ($\mathbb{D} = [0; 200]$) soll ihm dabei helfen. x beschreibt den Eintrittspreis in Euro und $T(x)$ gibt den entsprechenden Gewinn in Euro an.

Bestimme den maximalen Gewinn in Euro, der erzielt werden kann.

Aufgabe 3 Gegeben sind die folgenden quadratischen Terme.

(1) $0,2x^2 - x + 1$

(2) $-\frac{1}{8}x^2 - 0,5x$

(3) $x^2 + 0,4x + \frac{1}{25}$

(4) $0,5x^2 - 0,1x + \frac{1}{3}$

(5) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{10}x - 2$

(6) $-0,125x^2 + 8x$

(7) $\frac{1}{2}x^2 - 12$

(8) $7x^2 + 2x$

- Entscheide jeweils, ob mithilfe von quadratischer Ergänzung ein Maximalwert oder ein Minimalwert bestimmt werden kann.
- Führe die quadratische Ergänzung durch.
- Gib den x -Wert an für den der Term maximal/minimal wird und gib den zugehörigen Termwert an.

Aufgabe 4 Gegeben ist die allgemeine Parabelgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

- Entscheide für welche Werte von a ein Maximalwert bzw. ein Minimalwert bestimmt werden kann.
- Führe die quadratische Ergänzung durch.

Im Folgenden soll $a = 2$ gelten.

- Entscheide für welchen Wert von b ein Minimalwert bei $x = 3$ entsteht.

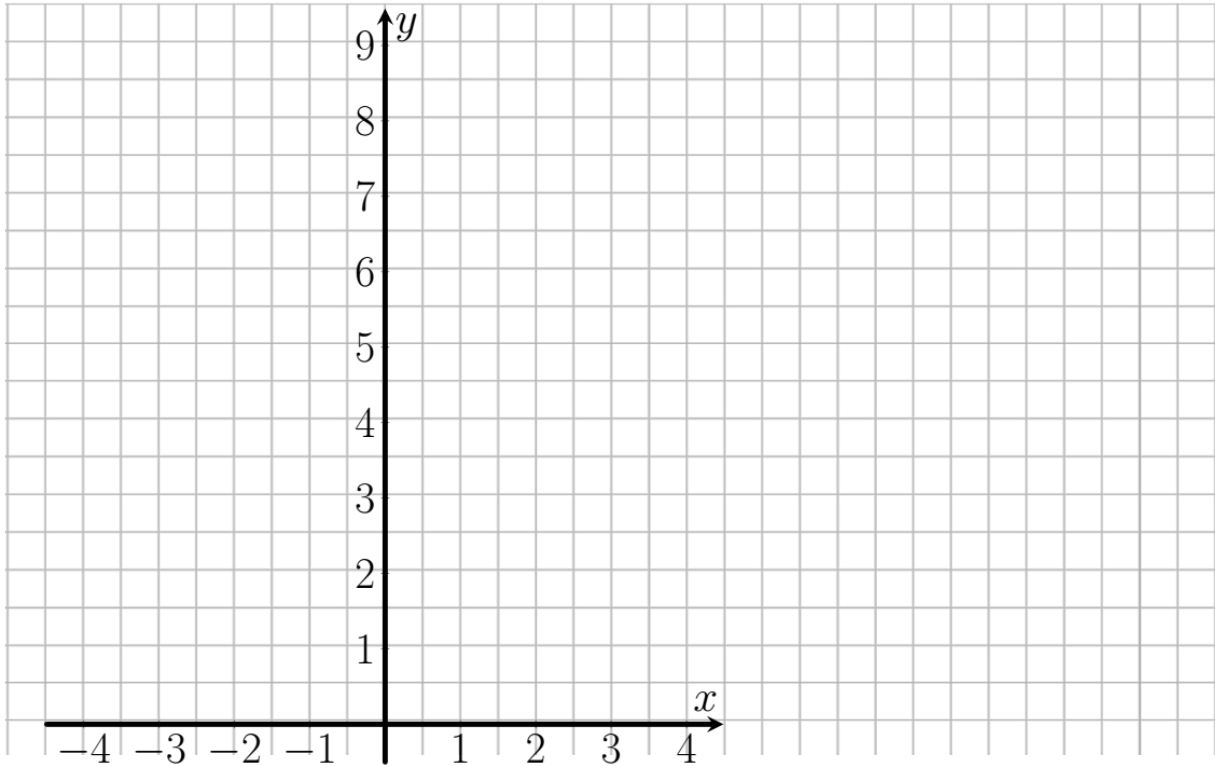


[Klicke hier oder verwende den QR-Code, um deine Ergebnisse zu überprüfen.](#)

02 Arbeitsblatt: Einführung quadratischer Funktionen

Aufgabe 1

- a) Erstelle mit deinem Taschenrechner die Wertetabelle einer auf ihrem maximalen Definitionsbereich definierten Funktion f_1 mit $f_1(x) = x^2$. Wähle als Startwert $x = -3$ und als Endwert $x = 3$ mit einer Schrittweite von 1. Der Graph G_{f_1} dieser Funktion wird als **Normalparabel** bezeichnet.
- b) Zeichne in folgendes Koordinatensystem die **Normalparabel** ein.



- c) Erstelle nun Wertetabellen für die auf ihrem maximalen Definitionsbereich definierten Funktionen f_2 und f_3 mit $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ und $f_3(x) = -2x^2 - 5x + 2$ und zeichne die Graphen G_{f_2} und G_{f_3} der Funktionen f_2 und f_3 in obiges Koordinatensystem.

Merke: Eine auf ganz \mathbb{R} definierte **quadratische Funktion** f hat im allgemeinen die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ (allgemeine Parabelform; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$).

Der Wert a ist der sogenannte **Leitkoeffizient**. Mit $|a|$ wird die **Öffnungsweite** bezeichnet. Der Graph der Funktion f wird als **Parabel** bezeichnet.

Aufgabe 2 Um die folgende Aufgabe lösen zu können, ist es hilfreich sich eine bestimmte Vorstellung von Parabeln vor Augen zu halten. Stellt man sich vor, dass eine Parabel den Querschnitt eines Gefäßes beschreibt, dann gilt:

Graphen in dessen zugehöriges Gefäß man von oben Wasser rein schütten kann, beschreiben eine nach oben geöffnete Parabel. Umgedrehte Gefäße beschreiben eine nach unten geöffnete Parabel. Vergleiche dazu auch Bild 1 und Bild 2.

Stelle mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ dar. Betrachte die Parabeln für verschiedene Werte von a und vervollständige die Tabelle.

$(< 0 \text{ oder } > 0)$	(oben/unten)
Für a _____	ist die Parabel nach _____ geöffnet.
Für a _____	ist die Parabel nach _____ geöffnet.

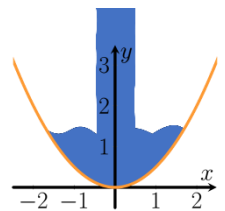


Bild 1: Nach oben geöffnete Parabel. Von oben strömt Wasser rein.

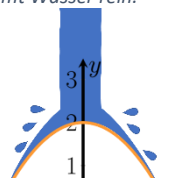


Bild 2: Nach unten geöffnete Parabel. Das Wasser oben prallt ab.

02 Übungen: Einführung quadratischer Funktionen

Aufgabe 1 Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 .

$f_1(x) = 2x^2 - 4x + 8$	$f_2(x) = -2x^2 - 8x + 3$	$f_3(x) = x^2 + 3x + 14$
$f_4(x) = 0,3x^2 + x + 5$	$f_5(x) = -0,25x^2 + 3x$	$f_6(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) und b).

- Ordne die Koeffizienten den Variablen a , b und c aus dem allgemeinen Funktionsterm $ax^2 + bx + c$ zu.
- Zeichne den Graphen der Funktion mithilfe einer Wertetabelle in ein Koordinatensystem.

Merke: Bei der allgemeinen Form (auch allgemeine Parabelform genannt) einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ wird $|a|$ die **Öffnungsweite** genannt.

Aufgabe 2 Stelle mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ und den Graphen der Funktion g mit $g(x) = x^2$ (Normalparabel) dar.

Vergleiche die verschiedenen Graphen für verschiedene Werte von der Öffnungsweite a mit der Normalparabel. Vervollständige dann die folgende Tabelle.

	Die Parabel ist nach oben/unten geöffnet	Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel gestaucht/gestreckt
Für $a < -1$		
Für $-1 < a < 0$		
Für $0 < a < 1$		
Für $a > 1$		

Aufgabe 3 Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 .

$f_1(x) = x^2 - 2,5x + 5$	$f_2(x) = -0,2x^2 + 4x - 1$	$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x$
$f_4(x) = 0,25x^2 + \frac{1}{8}x - 2$	$f_5(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$	$f_6(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x - 2$

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) – c).

- Entscheide jeweils, ob der Graph der Funktion eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel beschreibt.
- Gib an, ob der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel gestreckt oder gestaucht ist.
- Zeichne die Graphen der Funktionen jeweils in ein eigenes Koordinatensystem. Überprüfe deine Ergebnisse, indem du die Graphen mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) plotten lässt.



02 Übungen: Einführung quadratischer Funktionen

Aufgabe 4 Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 .

$$f_1(x) = -x^2 + 3$$

$$f_2(x) = -0,75x^2$$

$$f_3(x) = x^2 + 1$$

$$f_4(x) = 0,25x^2 - 1$$

$$f_5(x) = 2x^2 - x$$

$$f_6(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$$

- Berechne jeweils die zugehörigen y-Werte zu den x-Werten $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, und $x_3 = 4$.
- Bestimme die Nullstelle(n) der Funktion rechnerisch.
- Zeichne die Graphen mit Hilfe eines Funktionsplotters und überprüfe deine Ergebnisse aus Aufgabe 4a) und 4b). (Hinweis zu b: Die Nullstellen einer Funktion finden sich als die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit der x-Achse wieder.)

Aufgabe 5 Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 .

$$f_1(x) = 2x^2 - x + 1$$

$$f_2(x) = -x^2 - 2x + 3$$

$$f_3(x) = x^2 + 1,5x + 1$$

$$f_4(x) = 0,2x^2 + x$$

$$f_5(x) = -0,75x^2$$

$$f_6(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$$

- Ermittle jeweils durch Rechnung, ob die Punkte $A(1|2)$, $B(0|1)$, $C(2|-3)$ und $D(-1|-1)$ auf, oberhalb oder unterhalb des jeweiligen Graphen liegen. (Tipp: Setze den x-Wert jeweils in die Funktionsgleichung ein und vergleiche.)
- Zeichne die Graphen der Funktionen jeweils mit Hilfe eines Funktionsplotters. Überprüfe anschließend deine Ergebnisse aus Aufgabe a).
- Erstelle eine Aufgabe mit folgenden Kriterien:
 - Gegeben ist die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebene Funktion f mit einer von dir gewählten Funktionsgleichung.
 - Gib drei Punkte an, von denen einer auf, einer oberhalb und einer unterhalb des Graphen von f liegt.
 - In der Aufgabenstellung ist zu entscheiden, ob der jeweilige Punkt auf, oberhalb oder unterhalb des Graphen liegt.

Aufgabe 6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4$.

- Berechne $f(-1)$, $f(1)$ und $f(3)$.
- Bestimme die Schnittpunkte vom Graphen G_f von f mit den Koordinatenachsen. (Hilfe: [Ansätze zu Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen hier](#))
- Erläutere für welchen x-Wert der kleinste Funktionswert entsteht. Entscheide, ob es auch einen größten Funktionswert gibt, den f annehmen kann.



03 Informationsblatt: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Mit Hilfe der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion kann der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel ganz einfach bestimmt werden. Um von der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$, auf die Scheitelpunktform zu kommen, gibt es zwei gängige Wege. Beispiel: $f(x) = -0,6x^2 + 3,6x - 3$



Der kurze Weg

Die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_s)$ der zugehörigen Parabel können durch die folgenden Formeln einfach berechnet werden.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \text{ und } y_s = f(x_s)$$

Um x_s zu erhalten müssen wir also lediglich die entsprechenden Werte aus der allgemeinen Form einsetzen. Beispiel: $f(x) = -0,6x^2 + 3,6x - 3 \rightarrow b = 3,6$ und $a = -0,6$

$$\rightarrow x_s = -\frac{3,6}{2 \cdot (-0,6)} = 3$$

y_s erhält man dann, indem man $x_s = 3$ in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzt:

$$\rightarrow y_s = -0,6 \cdot 3^2 + 3,6 \cdot 3 - 3 = 2,4 \rightarrow S(3|2,4)$$

Damit kann die Scheitelpunktform dann ganz einfach angegeben werden.

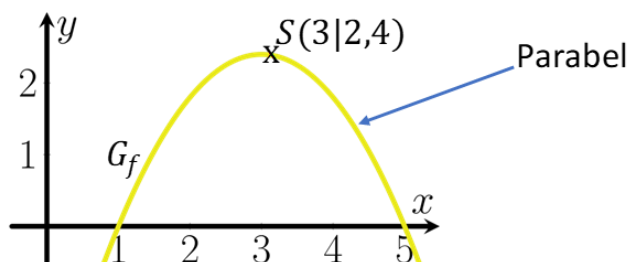
$$\text{Scheitelpunktform: } f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$\rightarrow f(x) = -0,6(x - 3)^2 + 2,4$$



Der lange Weg

Als Beispiel betrachten wir die Funktion f mit $f(x) = -0,6x^2 + 3,6x - 3$. Der Graph dieser Funktion ist im Folgenden abgebildet.



Neben der allgemeinen Form, kann eine quadratische Funktion auch in der sogenannten **Scheitelpunktform** dargestellt werden. Das funktioniert mithilfe der quadratischen Ergänzung. Im vorliegenden Beispiel sieht das folgendermaßen aus:



$$f(x) = -0,6x^2 + 3,6x - 3$$

$$f(x) = -0,6(x^2 + 6x + 5) \quad (\text{ausklammern})$$

$$f(x) = -0,6(x^2 - 2 \cdot 3x + 5)$$

$$f(x) = -0,6(x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 5) \quad (\text{zu einer binomischen Formel umformen})$$

$$f(x) = -0,6((x - 3)^2 - 3^2 + 5) \quad (\text{eine binomische Formel anwenden})$$

$$f(x) = -0,6((x - 3)^2 - 4) \quad (\text{vereinfachen})$$

$$f(x) = -0,6((x - 3)^2 + 2,4)$$

Hier wird die quadratische Ergänzung nochmal erklärt.

Mithilfe der **Scheitelpunktform** können die Koordinaten des sogenannten **Scheitelpunktes**

einer Parabel abgelesen werden. Allgemein kann man eine quadratische Funktion in der

Scheitelpunktform folgendermaßen darstellen: $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

x_s beschreibt dabei die x-Koordinate des zugehörigen Scheitelpunktes.

y_s beschreibt dabei die y-Koordinate des zugehörigen Scheitelpunktes.

a entspricht dem a aus der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$



03 Übungen: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Aufgabe 1 Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 .

$$f_1(x) = 2x^2 - 4x + 8$$

$$f_2(x) = -2x^2 - 8x + 3$$

$$f_3(x) = x^2 + 3x + 14$$

$$f_4(x) = 0,3x^2 + x + 5$$

$$f_5(x) = -0,25x^2 + 3x$$

$$f_6(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$$

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) – b).

- Bestimme durch möglichst einfache Rechenschritte die Scheitelpunktform der Funktion. Gib den Scheitelpunkt des zugehörigen Graphen der Funktion an.
- Zeichne den Graphen der Funktionen mithilfe einer Wertetabelle in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 2 Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 . Bestimme jeweils die Scheitelpunktform der Funktion.

$$f_1(x) = x^2 - 2,5x + 5$$

$$f_2(x) = -0,2x^2 + 4x - 1$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x$$

$$f_4(x) = 0,25x^2 + \frac{1}{8}x - 2$$

$$f_5(x) = \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$$

$$f_6(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x - 2$$

Aufgabe 3 Die Golden Gate Bridge ist eine Hängebrücke und ein Wahrzeichen San Franciscos. Sie wurde 1937 fertiggestellt und war zu diesem Zeitpunkt die längste Hängebrücke der Welt. Der komplette Brückenzug ist dabei 2737 Meter lang.



Im Querschnitt beschreibt das durchhängende Seil in der Mitte der Brücke näherungsweise eine Parabel. Die zugehörige quadratische Funktion f kann durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{280}{819200}x^2 + 20$ mit $\mathbb{D}_f = [-640; 640]$ beschrieben werden, wobei x und y in Metern angegeben werden. Dabei wird die x -Achse des Koordinatensystems auf Höhe der Straße gelegt.

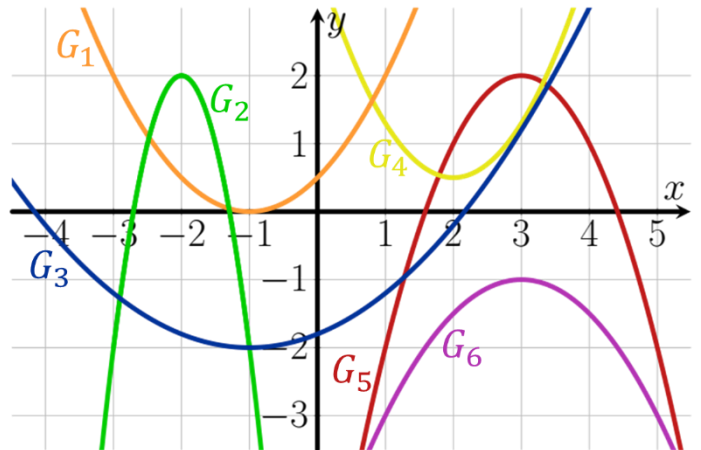
- Gib an, wo in der Zeichnung die y -Achse liegen muss. Begründe deine Entscheidung.
- Die beiden höchsten Punkte der Brücke werden an den Brückenpfeilern erreicht. Die Straße befindet sich 67 Meter oberhalb des Meeresspiegels. Bestimme die Höhe oberhalb der Meeresspiegel, an den höchsten Punkten der Brücke.
- Bestimme, wie weit das Seil am niedrigsten Punkt oberhalb der Straße hängt.



03 Übungen: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Aufgabe 4 Gegeben sind die folgenden Graphen G_1 bis G_6 quadratischer Funktionen.

- Gib jeweils den Scheitelpunkt der Parabel und deren Öffnung an.
- Gib jeweils die Wertemenge der zugehörigen quadratischen Funktion an.
Hilfe gibt es [hier](#):



Aufgabe 5 Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 .

$$f_1(x) = 2(x - 3)^2$$

$$f_2(x) = -0,5(x + 2)^2 + 2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{27}x^2 - \frac{1}{3}$$

$$f_4(x) = 0,1(x - 2)^2 - 1,6$$

$$f_5(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{7}$$

$$f_6(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 1$$

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) – d).

- Gib den Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel und deren Öffnung an.
- Gib an, wie viele Nullstellen die Funktion hat. Begründe deine Entscheidung. Berechne anschließend die Nullstellen der Funktion, falls diese existieren.
- Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem. Markiere die Nullstellen der zugehörigen Funktion, indem du die entsprechende(n) Stelle(n) auf der x-Achse einkreist.
- Gib die Wertemenge der Funktion an. Hilfe dazu gibt es [hier](#):



Aufgabe 6 Stelle die Funktion h in einer DGS mit $h(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ dar. (Hinweis: Die Variablen x_s und y_s müssen eventuell zunächst definiert werden, bevor die Funktionsgleichung dargestellt werden kann.)

a) Untersuche, wie sich der Graph von h in Abhängigkeit verschiedener Werte von x_s und y_s im Koordinatensystem verschiebt. Erstelle Merksätze dazu. Die folgenden Lückentexte können dir dabei helfen.

• Eine Veränderung von x_s um den Wert +1 sorgt für eine Verschiebung des Graphen in um eine Längeneinheit nach .

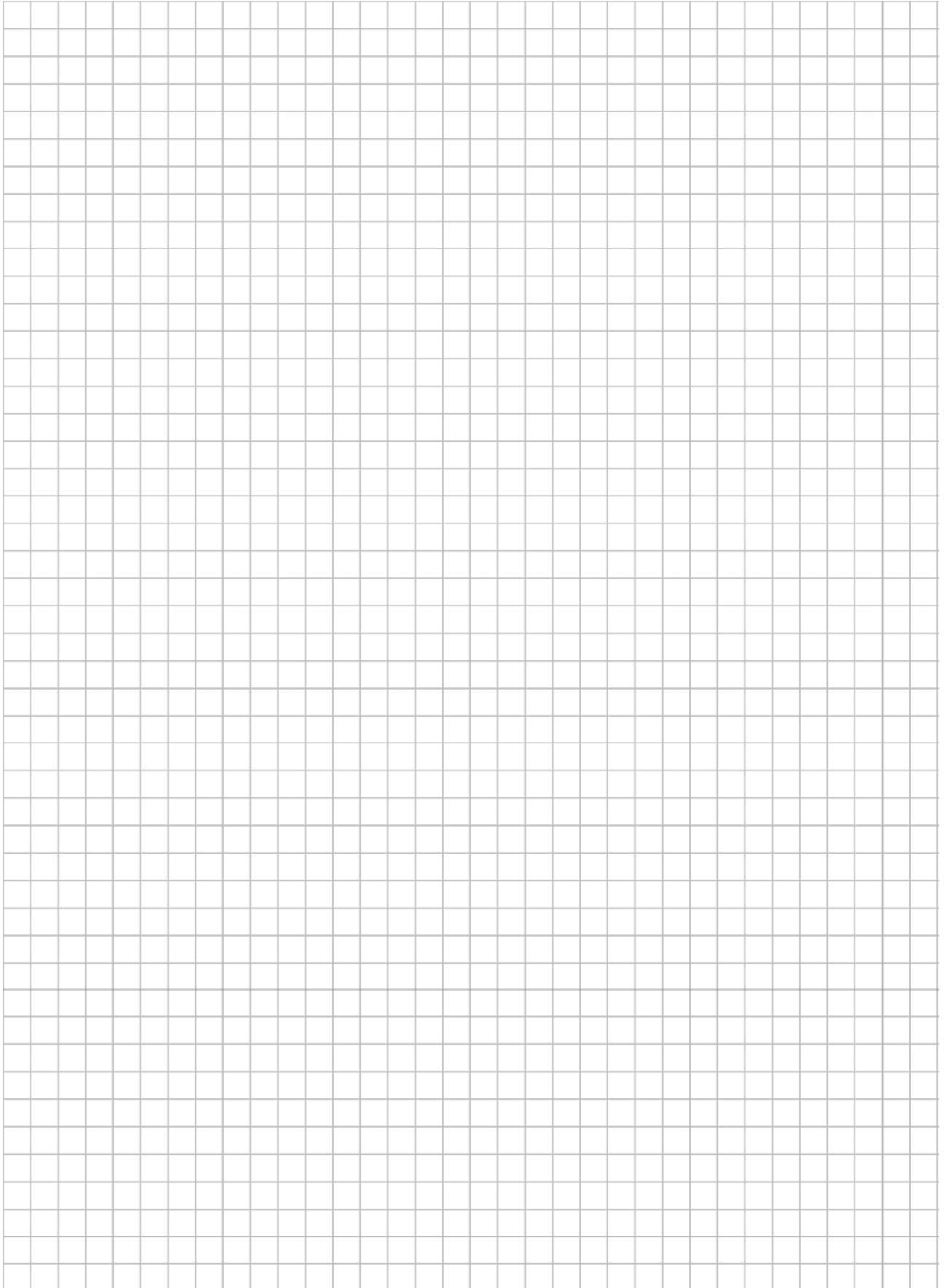
• Eine Veränderung von x_s um den Wert -1 sorgt für eine Verschiebung des Graphen in um eine Längeneinheit nach .

b) Untersuche für welche Werte von a und y_s die Funktion h **keine, genau eine oder genau zwei** Nullstellen besitzt.



04 AB: Spiegelung, Streckung, Stauchung und Verschiebung von Parabeln

Entscheidet nun unter fachlich begründeten Aspekten, ob Yussuf bzw. Samira eine korrekte Aussage getätigt haben. Verfasst gegebenenfalls einen korrekten Satz, wie der Graph der Funktion h aus dem Graphen der Funktion g hervor geht.



04 Übungen: Spiegelung, Streckung, Stauchung und Verschiebung von Parabeln

Aufgabe 1 Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen f_1 bis f_6 .

$$f_1(x) = x^2 + 1$$

$$f_2(x) = 2x^2$$

$$f_3(x) = (x - 3)^2$$

$$f_4(x) = (x + 2)^2$$

$$f_5(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$f_6(x) = -0,25x^2$$

$$f_7(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$$

$$f_8(x) = (x - 1)^2 + 2$$

Gib an, wie der Graph der jeweiligen Funktion aus der Normalparabel hervorgeht. (Hinweis: Die Normalparabel hat die zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = x^2$.)

Aufgabe 2 Gib jeweils die zugehörige Funktionsgleichung an.

- Der Graph der Funktion f geht aus der Normalparabel hervor, durch Verschiebung um $+1LE$ in x -Achsenrichtung.
- Der Graph der Funktion f geht aus der Normalparabel hervor, durch Verschiebung um $-2,5LE$ in y -Achsenrichtung.
- Der Graph der Funktion f geht aus der Normalparabel hervor, durch Streckung um den Faktor 2 in y -Achsenrichtung und Verschiebung um $-1,5LE$ in x -Achsenrichtung.
- Der Graph der Funktion f geht aus der Normalparabel hervor, durch Stauchung um den Faktor $\frac{1}{3}$ in y -Achsenrichtung und Verschiebung um $2,5LE$ in y -Achsenrichtung.
- Der Graph der Funktion f geht aus der Normalparabel hervor, durch Spiegelung an der x -Achse, Streckung um den Faktor 1,5 in y -Achsenrichtung und Verschiebung um $-1LE$ in x -Achsenrichtung.
- Der Graph der Funktion f geht aus der Normalparabel hervor, durch Spiegelung an der x -Achse, Stauchung um den Faktor 0,3 in y -Achsenrichtung, Verschiebung um $1,8LE$ in x -Achsenrichtung und Verschiebung um $-1LE$ in y -Achsenrichtung.

Aufgabe 3 Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen g_1 bis g_8 .

$$g_1(x) = (x - 1)^2 + 1$$

$$g_2(x) = 2x^2 + 1$$

$$g_3(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2$$

$$g_4(x) = x^2 + 2$$

$$g_5(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$g_6(x) = 0,25(x + 1)^2$$

$$g_7(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$$

$$g_8(x) = -x^2 + 2$$

- Gib an, wie der Graph der jeweiligen Funktion aus der Normalparabel hervorgeht. (Hinweis: Die Normalparabel hat die zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = x^2$.)
- Gib an, wie die Graphen der Funktionen g_1 bis g_4 aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = 2(x - 1)^2 + 2$ hervor gehen.

Aufgabe 4 Gib die zugehörige Funktionsgleichung an. Der Graph der Funktion f geht aus dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 1$ hervor, durch


- Verschiebung um $+2LE$ in x -Achsenrichtung.
- Verschiebung um $-1LE$ in y -Achsenrichtung.
- Spiegelung an der x -Achse.
- Überprüfe 4a)-c) indem du h und f von einer dynamischen Geometriesoftware zeichnen lässt.



05 Informationsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

10
Min

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; b, c \in \mathbb{R}$) können nicht durch so einfache Umformungen, wie bei linearen Gleichungen, nach x aufgelöst werden. Von daher hat es sich angeboten obige Gleichung allgemein nach x aufzulösen und das Endergebnis als Formel anzugeben. Diese dabei entstandene Formel lautet die „**Lösungsformel für quadratische Gleichungen**“:

1  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Die x -Werte, die dabei bestimmt werden, sind genau die Lösungen, die eingesetzt in der gegebenen Gleichung für eine wahre Aussage sorgen. Die Gleichung wird mithilfe der quadratischen Ergänzung gelöst. Die **Herleitung** der Formel kannst du dir auf der **Rückseite des Informationsblattes** anschauen.

2 **Beispielanwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:**



Die Platzhalter a , b und c stehen für Zahlen, die in einer konkreten Aufgabenstellung eingesetzt werden können. Wir schauen uns als Beispiel die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ an, die wir lösen möchten.

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

Hier identifizieren wir die Werte

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$

Falls du Verständnisprobleme hast, sieh dir das Lernvideo Teil 1 an.

Das \pm bei der Formel drückt aus, dass es zwei Lösungen für die Gleichung gibt. Man schreibt einmal den Bruch nur mit dem „-“ (Minuszeichen) und berechnet den Endwert und macht das Gleiche dann mit „+“ eingesetzt:

$$x_1 = \frac{-6-10}{4} = -4; \quad x_2 = \frac{-6+10}{4} = 1;$$

Macht man nun die Probe und setzt jeweils -4 oder 1 in die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ ein, dann erkennt man, dass genau diese Werte eine Lösung der Gleichung sind.

Im allgemeinen wird der Ausdruck unter der Wurzel die sogenannte Diskriminante D genannt. Man schreibt die Lösungsformel für quadratische Gleichungen deswegen auch folgendermaßen auf:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Der Grund für diese Art der Darstellung liegt darin, dass Abhängig von dem Wert unter der Wurzel ersichtlich wird, ob die betrachtete Gleichung zwei Lösungen, eine oder keine Lösung besitzt. Das wird hier jedoch noch nicht behandelt. Dazu gibt es ein Extraarbeitsblatt.

Schon fertig?

Sieh dir die **Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen** noch an.

Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Links ist das Lösen eines konkreten Beispiels. Auf der rechten Seite ist die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$$0 = 2x^2 + 6x - 8$$

$$0 = ax^2 + bx + c$$

1. Ausklammern

$$0 = 2(x^2 + 3x - 4)$$

$$0 = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

2. Zerlege den Koeffizienten von x , um den $2ab$ -Teil einer binomischen Formel zu erzeugen.

$$0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1,5x - 4)$$

$$0 = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$$

3. Führe die quadratische Ergänzung durch.

$$0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1,5x + 1,5^2 - 1,5^2 - 4)$$

$$0 = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$0 = 2((x + 1,5)^2 - 1,5^2 - 4)$$

$$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$0 = 2((x + 1,5)^2 - 6,25)$$

$$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Nun hat man den Term so umgeformt, dass in der kompletten Gleichung nur noch ein x steht und kann nach diesem auflösen.

$$0 = 2((x + 1,5)^2 - 6,25) \quad | :2$$

$$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \quad | :a$$

$$0 = (x + 1,5)^2 - 6,25 \quad | +1,562$$

$$0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad | + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$6,25 = (x + 1,5)^2 \quad \sqrt{}$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad \sqrt{}$$

$$\pm 2,5 = x + 1,5 \quad | -0,75$$

$$\pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a} \quad | + \frac{b}{2a}$$

$$x_{1,2} = -1,5 \pm 2,5$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Die Formel kann man nun noch umformen, da $\sqrt{4a^2} = 2a$ gilt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

05 Übungen: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Aufgabe 1 Gegeben sind die folgenden Gleichungen unter der Grundmenge \mathbb{R} . Bestimme die Lösungen der Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

a) $0 = 2x^2 - 2x - 12$

b) $0 = 3x^2 - 9x - 30$

c) $0 = 3x^2 + 6x - 45$

d) $0 = x^2 + x - 2$

e) $0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

f) $0 = x^2 + 4x + 4$

Aufgabe 2 Gegeben sind die folgenden Gleichungen unter der Grundmenge \mathbb{R} . Bestimme zunächst den Wert der Diskriminante. Gib die Anzahl der Lösungen der Gleichungen an und bestimme diese gegebenenfalls.

a) $0 = 2x^2 + 7x - 4$

b) $0 = 3x^2 + 26x - 9$

c) $0 = x^2 - 2x + 1$

d) $0 = 2x^2 + 4x + 3$

e) $2 = x^2 + x$

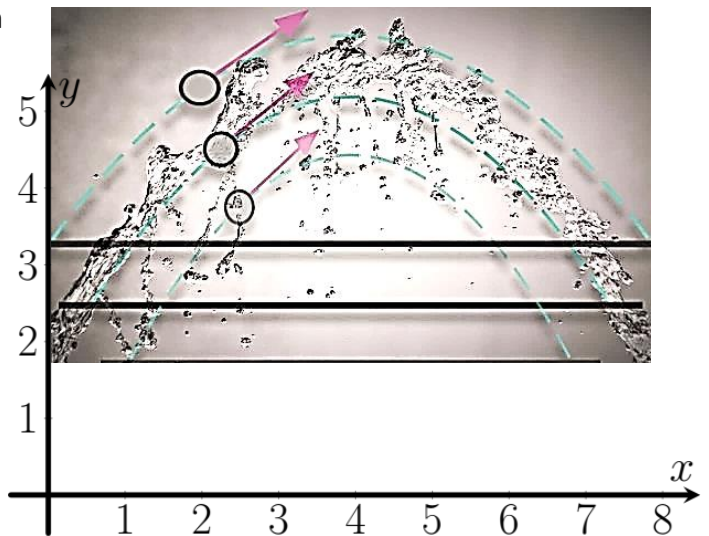
f) $2,5 = 0,7x^2 - 3x$

g) $0 = \frac{1}{3}x^2 - 3$

h) $2x^2 = -3x^2 - 1$

Aufgabe 3 Carl Friedrich möchte eine App programmieren, mithilfe derer Funktionsgraphen automatisch über Strukturen in Bildern gelegt werden. Zudem wird eine passende Funktionsgleichung ausgegeben. Im Folgenden wird die Flugkurve eines Wasserstrahls analysiert. Die App gibt die folgende Funktionsgleichung aus.

$$f_1(x) = -0,24x^2 + 1,85x + 0,2$$



- a) Bestimme die Nullstellen der Funktion und gib an, welcher Funktionsgraph am besten zu den Werten passt.
- b) Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunkts des Funktionsgraphen.
- c) Zeichne den Graphen der Funktion und entscheide, ob die vorgegebene Funktionsgleichung der App den Wasserstrahl gut beschreibt.



Hilfe zu b):
[Scheitelpunktform quadratischer Funktionen](#)

Aufgabe 4 Gegeben sind die folgenden Funktionen f_1 bis f_{12} auf ihrem maximalen Definitionsbereich.

$f_1(x) = x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$	$f_2(x) = x^2 - 4x$	$f_3(x) = 2x^2 - 8$
$f_4(x) = x^2 + 6x + 9$	$f_5(x) = 0,5(x - 1)(x + 4)$	$f_6(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 1$
$f_7(x) = -2x(x + 1)$	$f_8(x) = x^2 + 9x$	$f_9(x) = 2(x - 1)^2 - 8$
$f_{10}(x) = 0,5x^2$	$f_{11}(x) = 4x^2 + 16$	$f_{12}(x) = x^2 + x + 1$

- a) Bestimme die Nullstellen der Funktionen möglichst effizient.
- b) Gib die Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit den Koordinatenachse an.



Hilfe zu a):
[Sieh dir das Erklärvideo zu möglichen Lösungsweisen an.](#)



Hilfe zu b):
[Sieh dir das Erklärvideo zu Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen an.](#)



06 Informationsblatt: Nullstellenform quadratischer Funktionen



Funktionsterme quadratischer Funktionen können im Allgemeinen in drei verschiedenen Formen angegeben werden. Die allgemeine Form, die Scheitelpunktform und die Nullstellenform. Die allgemeine Form und die Scheitelpunktform werden in anderen Kapiteln behandelt. Wir vergleichen im Folgenden jedoch die allgemeine Form mit der Nullstellenform.

1 Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; b, c \in \mathbb{R}$)

Nullstellenform: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

Die Werte x_1 und x_2 stehen für die Nullstellen der quadratischen Funktion. Der Wert a ist bei beiden Gleichungen derselbe und wird als **Leitkoeffizient a** bezeichnet.

Beispiel:

Betrachtet wird die auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = -0,6x^2 + 3,6x - 3$.

Falls die Nullstellen der Funktion nicht gegeben sind, müssen diese erst berechnet werden.

In diesem Fall können wir das mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$$-0,6x^2 + 3,6x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3,6 \pm \sqrt{3,6^2 - 4 \cdot (-0,6) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-0,6)} = \frac{-3,6 \pm 2,4}{-1,2}$$

$$\rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = 5;$$

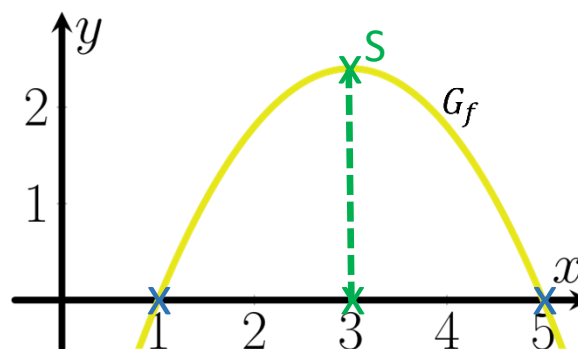
Jetzt muss nur noch in die Formel für die **Nullstellenform** eingesetzt werden.

2 $f(x) = -0,6(x - 1)(x - 5)$

Da beiden Formen die gleiche Funktion beschreiben, gehört zu beiden Formen auch derselbe Funktionsgraph G_f .



Falls du Verständnisprobleme hast, sieh dir noch das Lernvideo an.



Die Nullstellen finden wir an den Schnittpunkten der Parabel mit der x-Achse wieder.

Auf Grund des Symmetrieverhaltens von Parabeln befindet sich der x-Wert des Scheitelpunktes x_s genau zwischen den Schnittpunkten mit der x-Achse.

3 $x_s = \frac{1+5}{2} = 3$

Den y-Wert y_s kann man dann einfach ausrechnen indem man in eine der Funktionsgleichungen einsetzt.

4 $y_s = -0,6(3 - 1)(3 - 5) = 2,4 \rightarrow S(3|2,4)$



Schon fertig? Überlege dir, wie man die Nullstellenform in die allgemeine Form umwandeln kann. Die Lösung gibt's durch den Link oder den QR-Code.

06 Übungen: Nullstellenform quadratischer Funktionen

Aufgabe 1 Gegeben sind die auf ganz \mathbb{R} definierten quadratischen Funktionen $f_1 - f_6$.

$f_1(x) = x^2 - x - 6$	$f_2(x) = 2x^2 + 4x$	$f_3(x) = \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$
$f_4(x) = 2x^2 - 32$	$f_5(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$	$f_6(x) = 0,5x^2 + 1,5x - 2$

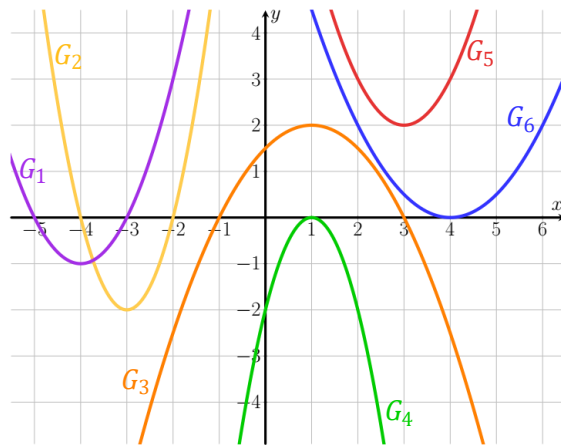
- Bestimme jeweils die Nullstellen der Funktion und gib die Funktionsgleichung in Nullstellenform an, falls möglich.
- Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1 - f_6$ mithilfe einer DGS (dynamischen Geometriesoftware) und überprüfe damit deine Ergebnisse aus Aufgabe a).

Aufgabe 2 Gegeben sind die auf ganz \mathbb{R} definierten quadratischen Funktionen $f_1 - f_6$.

$f_1(x) = (x - 4)(x - 1)$	$f_2(x) = 2(x + 1)(x + 2)$	$f_3(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x + 2)$
$f_4(x) = \frac{1}{4}(x - 1)^2$	$f_5(x) = \frac{1}{2}x(x - 2)$	$f_6(x) = -(2x - 4)(x + 2)$

- Gib jeweils ohne weitere Rechnung die Schnittpunkte der Graphen von $f_1 - f_6$ mit den Koordinatenachsen an.
- Zeichne die Graphen von $G_{f_1} - G_{f_6}$ der Funktionen $f_1 - f_6$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwende dabei für jeden Graphen eine eigene Farbe. Überprüfe damit deine Ergebnisse aus a).

Aufgabe 3 Gegeben sind die Graphen $G_1 - G_6$ der Funktionen $f_1 - f_6$.



Hilfe zur graphischen Bestimmung des Leitkoeffizienten a.

- Gib die Funktionsgleichungen in Nullstellenform an, falls möglich. Lese die Nullstellen dazu so genau wie möglich vom Graphen ab.
- Gib die Funktionsgleichungen in Scheitelpunktform an.
- Bestimme mithilfe der Ergebnisse aus a) oder b) die allgemeine Form der Funktionsgleichungen.

Aufgabe 4 Gegeben sind im Folgenden die Nullstellen von auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen $f_1 - f_6$ mit $a = 1$. Gib jeweils die Nullstellenform an.

$x_1 = 1; x_2 = 4;$	$x_1 = -1; x_2 = -4;$	$x_1 = 1; x_2 = -4;$
$x_1 = -1; x_2 = 4;$	$x_1 = 0; x_2 = 4;$	$x_1 = 0; x_2 = -4;$



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um die Aufgaben zu überprüfen.



07 quadratische Funktionsgleichungen bestimmen

Einführung Mache den [Selbstlernkurs zum bestimmen quadratischer Funktionsgleichungen](#).



Aufgabe 1 Gegeben sind auf ganz \mathbb{R} definierte quadratische Funktionen. Bestimme jeweils die zugehörige Funktionsgleichung.

a) $A(0 1), B(1 3), C(3 13)$	e) $A(-3 - 2,5), B(1 1,5), C(3 11)$
b) $A(-2 - 2), B(1 2,5), C(2 6)$	f) $A(-1 3), B(1 13), C(2 7,5)$
c) $A(-1 3,5), B(2 - 1), C(3 - 0,5)$	g) $A(-0,5 4), B(0 4), C(2 3)$
d) $A(-3 - 11), B(0 2,5), C(1 0,5)$	h) $A(-1 - 1,2), B(-2 - 2,6), C(3 8,4)$

Aufgabe 2 Ein Tennisspieler trainiert mit einer Ballwurfmaschine auf einem 24 Meter langem Tennisfeld. Die Flugbahn des Balles ist dabei parabelförmig. Der Ball wird auf der Grundlinie abgeschossen und hat nach 10 Metern eine Höhe von 1,5 Metern. Nach 15 Metern liegt die Höhe noch bei 1 Meter, während er schließlich 20 Meter von der Abwurfstelle entfernt landet.

- a) Bestimme den zugehörigen quadratischen Funktionsterm, wobei x die Weite in Metern und y die aktuelle Höhe beschreiben soll.
- b) Auf halber Länge des Tennisfeldes befindet sich das Tennisnetz. Bestimme, in welcher Höhe der Tennisspieler den Ball trifft, wenn er 2 Meter hinter dem Netz steht. Runde auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 3 Carla Friedrich übt das Freierwerfen beim Basketball. Bei ihrem Wurf hat der Ball 2 Metern in waagrechter Richtung eine Höhe von 4,52 Metern, nach 3 Metern eine Höhe von 4,77 Metern und nach 4 Metern eine Höhe von 4,28 Metern. Die Flugkurve des Balls kann durch eine Parabel genähert werden.

- a) Bestimme die Funktionsgleichung der zugehörigen quadratischen Funktion f , bei der die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der waagrechten Wurfweite beschrieben wird.
- b) Der Basketballkorb hat waagrecht eine Entfernung von 5 Metern. Der Korb hängt dabei 3,05 Meter hoch. Entscheide mathematisch begründet, ob der Ball den Korb trifft.

Aufgabe 4 Der Veranstalter einer Festivals möchte mit Hilfe der Eintrittspreise einen maximalen Gewinn erzielen. Den Gewinn $f(x)$ in Abhängigkeit des Eintrittspreises x kann man dabei durch eine quadratische Funktion nähern. Bekannt ist, dass bei einem Preis von 50€ in etwa ein Gewinn von 82500€ zu erwarten ist, während bei einem Preis von 100€ in etwa ein Gewinn von 130000€ erwartet wird. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm. Hinweis: Du kannst dir zusätzlich den erwarteten Gewinn bei einem Preis von 0€ überlegen.

Aufgabe 5 Gegeben sind auf ganz \mathbb{R} definierte quadratische Funktionen. Bestimme jeweils die zugehörige Funktionsgleichung. Der Punkt S beschreibt den Scheitelpunkt der Parabel.

a) $A(0 1), S(5 3)$	b) $A(3 1), S(4 8)$
c) $A(-2 0), B(1 0), C(2 2)$	d) $A(2 0), B(6 0), C(1 4)$
e) $A(2 0), S(4 3)$	f) $A(-3 0), B(3 0), C(1 1)$



Bestimmung über Scheitelpunktform



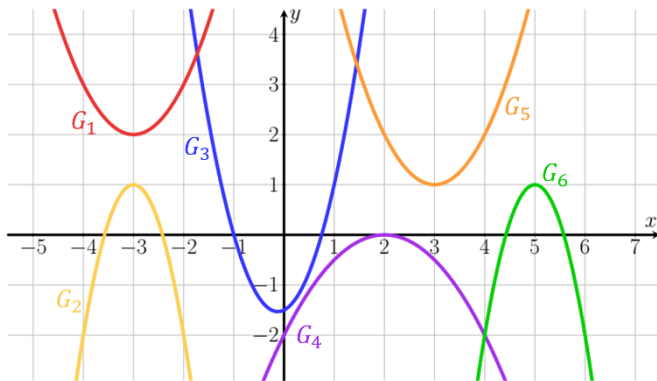
Bestimmung über Nullstellenform



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um die Aufgaben zu überprüfen.

08 Übungen: quadratische Funktionen mit Parameter

Aufgabe 1 Gegeben sind Graphen von auf ganz \mathbb{R} definierten quadratischen Funktionen. Bestimme die Wertemenge der Funktionen graphisch.



[Link: Hilfe zur Bestimmung von Wertemengen](#)

Aufgabe 2 Gegeben sind auf ganz \mathbb{R} definierte quadratische Funktionen mit folgenden Funktionsgleichungen.

$$f_1(x) = 2(x - 1)^2 + 3$$

$$f_4(x) = 0,5(x - 1)(x + 3)$$

$$f_2(x) = (x + 1,5)^2 - 1$$

$$f_5(x) = -0,25(x - 3)(x + 2)$$

$$f_3(x) = -0,5(x + 2)^2 + 1$$

$$f_6(x) = -2(x - 1)(x + 0,5)$$

- Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1 - f_6$ ohne einen Taschenrechner zu verwenden.
- Gib die Wertemenge der Funktionen an.
- Erläutere, wie man nur mithilfe der Scheitelpunktform und ohne zugehörigen Graphen die Wertemenge bei den Funktionen f_1 , f_2 und f_3 angeben kann.



[Link: Hilfe zur Bestimmung von Wertemengen](#)

Aufgabe 3 Gegeben ist die Schar der auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = kx^2 - 2 \text{ mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Verwende eine dynamische Geometriesoftware (DGS), definiere zunächst den Parameter k und lasse anschließend die Funktion f_k zeichnen.
- Entscheide mithilfe der DGS für welchen Wert von k die Funktion f_k genau die zwei Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ besitzt.
- Stelle einen rechnerischen Weg dar, um Aufgabe b) zu lösen.
- Gib den Scheitelpunkt an, den alle Funktionsgraphen unabhängig von k besitzen.
- Bestimme den Wert für k , bei dem der Scheitelpunkt des Graphen von f_k durch den Punkt $P(2|1)$ geht.

Aufgabe 4 Betrachtet wird die Schar der auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Parabeln sind nach oben geöffnet und besitzen die Scheitelpunkte $S(-1|0,5k + 2)$.

- Bestimme den Wert für k , sodass die Parabel die x -Achse berührt.
- Bestimme den Wert für k , sodass die Parabel die x -Achse nicht schneidet und nicht berührt.
- Gib die Funktionsgleichung einer Funktionenschar f_k an, die obige Scheitelpunkte besitzt. Tipp: Verwende die Scheitelpunktform.



08 Übungen: quadratische Funktionen mit Parameter

Aufgabe 5 Gegeben ist die Schar der auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit $f_a(x) = ax^2 - 4a$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Bestimme den Wert des Parameters a so, dass der Punkt $P(1 | -6)$ auf dem Graphen von f_a liegt.
- b) Bestimme die Nullstellen von f_a und entscheide, ob diese von a abhängig sind.
- c) Untersuche, ob der Scheitelpunkt der Graphen von f_a von a abhängig ist.
- d) Zeichne die Graphen von f_a für $a = -2$, $a = 0,5$ und $a = 1$.

Aufgabe 6 Gegeben ist die Schar der auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit $f_a(x) = ax^2 - 4x + 2a$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Bestimme den Wert des Parameters a so, dass der Punkt $P(0|2)$ auf dem Graphen von f_a liegt.
- b) Bestimme a so, dass f_a eine doppelte Nullstelle besitzt. Gib f_a für diesen Wert von a in Nullstellenform.
- c) Untersuche, ob der Scheitelpunkt der Graphen von f_a von a abhängig ist.
- d) Bestimme a so, dass der Scheitelpunkt an der Stelle $x = 1$ liegt.

Aufgabe 7 Gegeben ist die Schar der auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit $f_a(x) = ax^2 - 8ax + 2$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- a) Bestimme a so, dass f_a eine doppelte Nullstelle besitzt. Gib f_a für diesen Wert von a in Nullstellenform.
- b) Untersuche, ob der Scheitelpunkt der Graphen von f_a von a abhängig ist. Gib die Funktion f_a in Scheitelpunktform an.
- c) Bestimme den Wert a so, dass der Scheitelpunkt der Funktion den y -Wert $y = 4$ hat.

Aufgabe 8 Gegeben sind die folgenden drei Graphen einer auf ganz \mathbb{R} definierten Schar von Funktionen f_k .

- a) Gib die Funktionsgleichungen der Graphen G_1 , G_2 und G_3 in Scheitelpunktform und Nullstellenform an.
- b) Schließe aus Aufgabe a) auf die Funktionsgleichung der Schar der Funktionen f_k und gib diese in Scheitelpunktform und Nullstellenform an.

