Inhaltsverzeichnis

TEIL 1: ohne Hilfsmittel - Analysis

1. Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = [-3; 3]$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

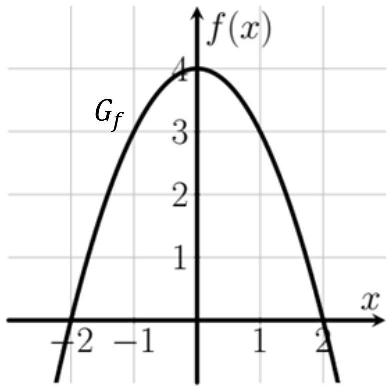
1.1. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem. **(2BE)**

Lösung S.13 Lösungsvideo

1.2. Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g. **(4BE)**

Lösung S.13 Lösungsvideo

2. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



2.1 Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. **(4BE)**

Lösung S.14 Lösungsvideo

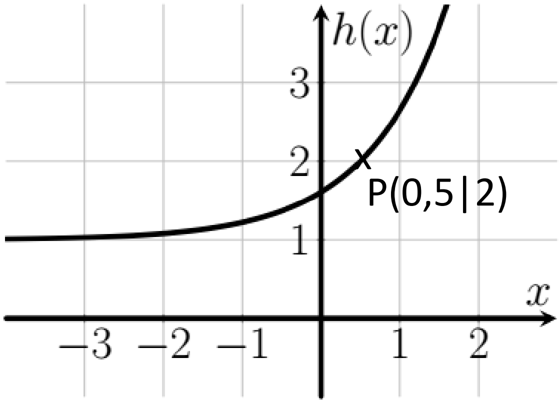
2.2 Die Funktion F mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_F bezeichnet.
Beschreiben Sie den Globalverlauf des Graphen G_F in Worten. Gehen Sie auch auf das Monotonieverhalten, die Lage und die Art der Extremstellen sowie auf die Lage der Wendestellen von F ein. **(4BE)**

Lösung S.15 Lösungsvideo

3. Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. **(3BE)**
$(e^x)^2 - 25 = 0$

Lösung S.15 Lösungsvideo

4. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer Exponentialfunktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Der zugehörige Funktionsterm besitzt die Form $h(x) = e^{x+d} + y_0$ mit $d, y_0 \in \mathbb{R}$.



4.1 Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung nachvollziehbar die Werte der Parameter d und y_0. **(3BE)**

Lösung S.16 Lösungsvideo

4.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen der Funktion h, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen dazu in der Abbildung unter 4.0.

$$\int_{-1}^{1} \left(2 - h(x)\right) dx > 0$$

(2BE)

Lösung S.17 Lösungsvideo

$\sum 22$

TEIL 1: ohne Hilfsmittel - Stochastik

1. Bei einem Glücksradspiel beträgt der Einsatz 2€, maximal werden 5€ ausbezahlt. Die Zufallsgröße X gibt den Nettogewinn bei diesem Spiel (in Euro) an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann mithilfe der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ wie folgt dargestellt werden:

x	-2	-1	$0{,}5$	$1{,}5$	3
$P(X = x)$	$0{,}20$	a	$0{,}20$	b	$0{,}10$

1.1 Erläutern Sie, was der Ausdruck „faires Spiel" im Zusammenhang mit Glücksspielen bedeutet und nennen Sie eine Bedingung, die von der hier dargestellten Zufallsgröße X erfüllt werden muss, damit das beschriebene Glücksspiel fair ist. **(2BE)**

Lösung S.18 Lösungsvideo

1.2 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass es sich bei diesem Glücksradspiel um ein faires Spiel handelt. **(4BE)**

Lösung S.18 Lösungsvideo

2. Ein Gaststättenverband hat unter 1500 Touristen in der Fränkischen Schweiz eine Befragung durchgeführt, um zu erfahren, ob die Touristen die heimischen Biergärten besuchen (B). Dabei wurde zwischen Personen, die eine Tagestour bei einem Veranstalter gebucht haben (V), und Individualtouristen ($\overline{V}$) unterschieden. Tausend der Befragten gaben an, keine Tagestour bei einem Veranstaltet gebucht zu haben. Von den Touristen, die sich für eine Tagestour entschieden hatten, besuchten 80% einen Biergarten. Nur 300 aller Befragten gaben an, keinen Biergarten besucht zu haben.

Anmerkung: Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

2.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel den Anteil der Touristen, die entweder eine Tagestour bei einem Veranstalter gebucht haben oder einen Biergarten in der Fränkischen Schweiz besucht haben. **(4BE)**

Lösung S.19 Lösungsvideo

2.2 Begründen Sie, ob der Gaststättenverband mit der folgenden Behauptung recht hat:

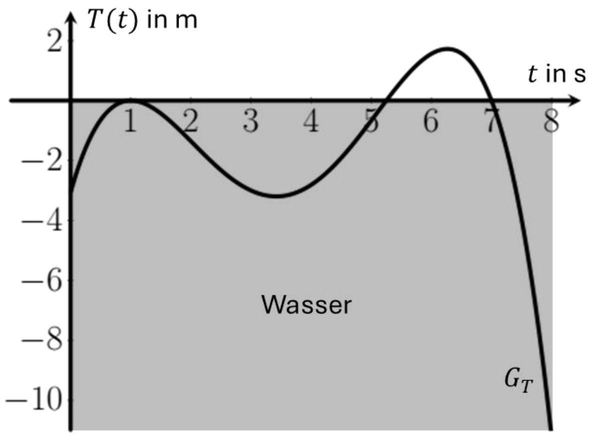
„Die Biergärten in der Fränkischen Schweiz sind für alle Touristen gleich attraktiv, egal ob zuvor eine Tagestour bei einem Veranstalter gebucht wurde oder nicht". **(2BE)**

Lösung S.19 Lösungsvideo

$\sum 12$

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I

1.0 Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht. Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion T beschreiben.
Der Graph der Funktion T wird mit G_T bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im nebenstehenden Koordinatensystem abgebildet.



Die Funktion T ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

1.1 Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen G_T den Bewegungsablauf des Delfins im Bereich von $t \approx 5{,}3$ bis $t = 7$ und erläutern Sie, ob für die Funktion T das Intervall $[0; \infty[$ für den beschriebenen Sachverhalt eine sinnvolle Definitionsmenge ist. **(2BE)**

Lösung S.20 Lösungsvideo

1.2 Der Leitkoeffizient im Funktionsterm von T ist gegeben durch $a = -\frac{1}{12}$. Zudem ist bekannt, dass G_T den Schnittpunkt $S\left(0\middle|-\frac{28}{9}\right)$ mit der Ordinatenachse besitzt. Die zwei ganzzahligen Nullstellen von T können der Zeichnung entnommen werden.
Berechnen Sie den exakten Wert der fehlenden Nullstelle von T. **(4BE)**

Lösung S.21 Lösungsvideo

1.3.0 Die Funktion T ist gegeben durch die Funktionsgleichung
$T(t) = -\frac{1}{12}\left(t^4 - \frac{43}{3}t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_T = [0; 8]$.
Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

1.3.1 Bestimmen Sie die Wertemenge W_T der Funktion T und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. **(9BE)**

Lösung S.22 Lösungsvideo

1.3.2 Für $t \in]1; 5{,}3[$ befindet sich der Delfin unter Wasser. Ermitteln Sie rechnerisch, ob in diesem Zeitintervall der Betrag der größten Abtauchgeschwindigkeit größer als der Betrag der größten Auftauchgeschwindigkeit ist. **(6BE)**

Lösung S.24 Lösungsvideo

2.0 An einem Küstenabschnitt stranden immer wieder Delfine. Diese werden in einer Auffangstation gesund gepflegt, bis sie wieder in freier Natur überleben können. Um die Kapazität der Auffangstation zu erhöhen, soll ein zusätzliches Becken aus Edelstahl angefertigt werden, welches die Form eines geraden Kreiszylinders hat und nach oben offen ist. Dazu steht ein begrenzter Vorrat an Edelstahlblechen zur Verfügung. Diese haben modellhaft insgesamt eine Fläche von $180\pi m^2$. Aus Platzgründen kann das Becken nur einen maximalen Durchmesser von $20\ m$ haben.
Die Funktion $V: r \mapsto V(r)$ beschreibt die Maßzahl des Volumens des Beckens in Kubickmetern in Abhängigkeit von Radius r in Metern.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.

2.1 Stelle Sie eine Gleichung der Funktion V auf. Begründen Sie, dass für die mathematisch maximale Definitionsmenge der Funktion V gilt: $D_V =]0; 10]$ **(5BE)**

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r$]

Lösung S.25 Lösungsvideo

2.2 Zeigen Sie, dass unter den oben genannten Vorgaben das Becken für einen Radius von $r = 2\sqrt{15}$ den maximalen Rauminhalt aufweist. Überprüfen Sie anschließend, ob dieses Becken für eine vorübergehende Haltung von drei Delfinen ausreicht, wenn pro Delfin $360 m^3$ Wasser zur Verfügung stehen sollen. **(7BE)**

Lösung S.26 Lösungsvideo

2.3 Berechnen Sie für den unter 2.2 gegebenen Beckenradius die Größe der Grundfläche des Beckens A_0 in Quadratmetern. **(2BE)**
[Ergebnis: $A_0 \approx 188{,}5 m^2$]

Lösung S.27 Lösungsvideo

2.4.0 Ein zu Beginn (Zeitpunkt $t_0 = 0$) $0{,}5 m^2$ großer Algenteppich, der sich am Boden des Beckens mit der Grundfläche A_0 (siehe 2.3) gebildet hat, verdoppelt seine Fläche täglich.

2.4.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ auf, welche die Fläche des Algenteppichs in Quadratmetern in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen angibt. Für die Definitionsmenge der Funktion A gilt $D_A = [0; 8]$. **(2BE)**

Lösung S.27 Lösungsvideo

2.4.2 Zeigen Sie, dass sich die Wachstumsfunktion A näherungsweise durch die Funktionsgleichung $\tilde{A}(t) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}6931 \cdot t}$ mit $D_{\tilde{A}} = D_A$ darstellen lässt und berechnen Sie damit, nach wie vielen Tagen zwei Drittel der gesamten Grundfläche des Beckens von Algen bedeckt wären, wenn nicht eingegriffen würde. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Tage. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. **(6BE)**

Lösung S.27 Lösungsvideo

$\sum 43$

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II

1. Der Graph der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ schneidet in einem kartesischen Koordinatensystem die y-Achse beim Wert $y = 2$ und verläuft durch den Extrempunkt $E(2|1{,}2)$. Außerdem ist bekannt, dass der Funktionsterm durch $f(x) = ax^3 + bx^2 - 0{,}9x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ dargestellt werden kann.

1.1. Bestimmen Sie im Funktionsterm von f die Werte der Parameter a, b und $c \in \mathbb{R}$. **(6BE)**

Lösung S.28 Lösungsvideo

1.2. Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = f(x) = -0{,}025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)$ und der Definitionsmenge $D_g = [0; 7]$ betrachtet. Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.2.1. Bestimmen Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_g und geben Sie die Wertemenge W_g von g an. **(9BE)**

Lösung S.29 Lösungsvideo

1.2.2. Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $0 \leq x \leq 7$ in ein Koordinatensystem. Maßstab für die x-Achse: $1LE = 1cm$, für die y-Achse: $1LE = 2cm$. **(4BE)**

Lösung S.30 Lösungsvideo

1.2.3. Der Graph G_g , die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 6$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. **(3BE)**

Lösung S.31 Lösungsvideo

2. Beim Aufladen des Akkus eines Smartphones fließt ein Ladestrom von 2000 Milliampere. Sobald der Akku optimal geladen ist, verringert das Ladegerät den Ladestrom um eine Überladung zu vermeiden.

Die Funktion I mit $I(t) = 2000 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{4{,}88}}$ und $t \in D_I \subset \mathbb{R}$ modelliert den Verlauf des Ladestroms ab dem Erreichen der optimalen Akkuladung zur Zeit $t = 0$ bis zur endgültigen Abschaltung des Ladegeräts zur Zeit $t_{end} > 0$. Die Funktionswerte von I entsprechen der Stärke des Ladestroms in Milliampere und t entspricht der Zeit in Minuten.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

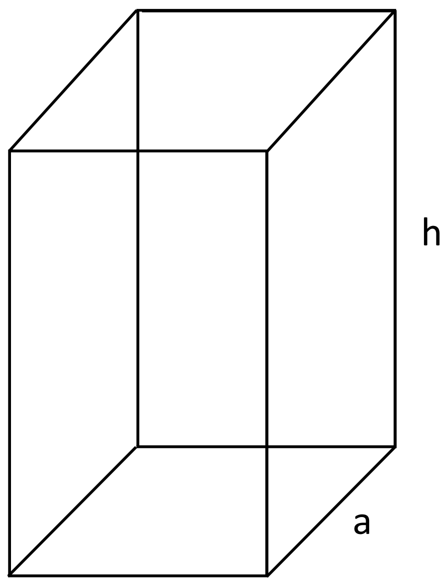
2.1. Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm näherungsweise auch in der Form $\tilde{I}(t) = 2000 \cdot e^{-0{,}142 \cdot t}$ schreiben lässt. **(3BE)**

Lösung S.32 Lösungsvideo

2.2. Das Ladegerät schaltet sich komplett ab, wenn die Ladestromstärke auf 100 Milliampere abgesunken ist. Ermitteln Sie t_{end} unter Verwendung des Funktionsterms aus 2.1 . Runden Sie das Ergebnis auf ganze Minuten und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für $\tilde{I}$ an. **(4BE)**

Lösung S.33 Lösungsvideo

3. Die Firma FACTUS soll für einen Süßwarenhersteller quaderförmige Verpackungen für Schokoladenbonbons produzieren. Der Auftraggeber verlangt, dass die Verpackung eine quadratische Grundfläche aufweist und dass die Summe aus Länge, Breite und Höhe $45\ cm$ beträgt, damit der Verpackungsautomat die gefalteten Verpackungen verarbeiteten und befüllen kann. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche wird mit a bezeichnet.
Die Werte der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ geben jeweils das Volumen der Verpackung in cm^3 an. Damit die Verpackung handlich bleibt, soll die Seitenlänge a der Grundfläche mindestens $10\ cm$ und höchstens $20\ cm$ betragen.



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

3.1. Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion V. **(3BE)**
[Mögliches Ergebnis: $V(a) = 45a^2 - 2a^3$]

Lösung S.34 Lösungsvideo

3.2. Ermitteln Sie die Maße einer Verpackung der Firma FACTUS, die den Vorgaben entspricht und dabei maximales Volumen besitzt. Geben Sie die spezielle Form dieser Verpackung an und berechnen Sie das Volumen. **(7BE)**

Lösung S.35 Lösungsvideo

3.3. Die Firma FACTUS bekommt den Auftrag, 6000 würfelförmige und bedruckte Verpackungen mit einer Kantenlänge von $15\ cm$ herzustellen.
Aus Kostengründen überlegt die Firma, ob sie den Druckauftrag an die eigene Druckerei *FACTUS-Print* geben soll oder ob das Angebot der Konkurrenzfirma *PappDruck* günstiger ist. Bei den Verpackungen werden alle Außenflächen außer der Bodenfläche bedruckt.

	Druckkosten	Rabatt
FACTUS-Print	8 Cent pro $1000\ cm^2$	Kein Rabatt
PappDruck	9 Cent pro Verpackung	Bedruckung jedes 10. Würfels gratis

Entscheiden Sie rechnerisch, welche Firma aus wirtschaftlicher Sicht den Druckauftrag bekommen sollte. **(4BE)**

Lösung S.36 Lösungsvideo

$\sum 43$

TEIL 2: mit Hilfsmittel - Stochastik I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einem Hersteller von Elektroautos (E-Autos) können die Kunden beim Kauf eines Autos zwischen den Modellen A, B und C wählen. 30% der Kunden entscheiden sich für Modell C. Die restlichen Kunden wählen zu gleichen Teilen A bzw. B.
Die Modelle B und C werden mit einer kleinen (K) oder einer großen (G) Batterie angeboten. Das Modell A kann nur mit einer kleinen Batterie bestellt werden. Bei Modell B entscheiden sich vier von zehn Kunden für die große Batterie, während sich beim Modell C nur 15% der Kunden für die kleine Batterie entscheiden.
Zusätzlich können alle Modelle noch mit einem Autopilot (P) ausgestattet werden. Bei Modell B und C erfolgt die Wahl unabhängig von der Batteriegröße. Dieses Zusatzangebot wählen beim Modell A 20% der Kunden und beim Modell B jeweils 30%. Insgesamt werden 41,5% aller Fahrzeuge mit Autopilot gewünscht.

Die Wahl des Modells, der Batteriegröße und der Zusatzfunktion Autopilot eines beliebig herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1. Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller zehn Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **(6BE)**

[Teilergebnis: $P(\{C; K; P\}) = 0{,}036$]

Lösung S.37 Lösungsvideo

1.2. Gegeben sind folgende Ereignisse:
E_1: „Ein zufällig ausgewählter Kunde wählt Modell A oder C jeweils mit Autopilot."
E_2: „Ein zufällig ausgewählter Kunde wählt entweder die kleine Batterie oder den Autopilot."

Berechnen Sie nachvollziehbar jeweils die Wahrscheinlichkeit für E_1 und für E_2. **(3BE)**

Lösung S.38 Lösungsvideo

2. In einer Kleinstadt sind 30% aller zugelassenen Elektroautos der Oberklasse (O) zuzuordnen, die restlichen werden der Mittelklasse (M) zugeordnet. Die Akkus aller hier betrachteten Elektroautos werden zu 39,5 % regelmäßig über eine Photovoltaikanlage (V) des jeweiligen Fahrzeugeigners geladen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig aus all diesen Fahrzeugen ausgewähltes Elektroauto ein Modell der Oberklasse ist und regelmäßig über eine Photovoltaik-Anlage aufgeladen wird, beträgt 25,5 %.

2.1 Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_3 = \overline{M \cap V}$. **(4BE)** Lösung S.39 Lösungsvideo

2.2 Untersuchen Sie, ob der Anteil der Fahrzeuge, die über eine Photovoltaik-Anlage des Fahrzeugeigners geladen werden, bei den Oberklasse-Modellen höher ist als bei den Mittelklasse-Modellen. Entscheiden Sie anschließend, ob die Ereignisse M und V stochastisch unabhängig sind. **(4BE)** Lösung S.40 Lösungsvideo

3. Am Parkplatz eines großen Einkaufszentrums wurde im Rahmen einer Bachelor-Arbeit eine langelegte Studie zum Laden von E-Autos an den dort vorhandenen Ladesäulen durchgeführt. Dieses lieferte folgende Ergebnisse: 80% der Ladevorgänge erfolgen während der Zeit, in der die Besitzer der Fahrzeuge im Einkaufszentrum verweilen. Alle anderen Besitzer verbringen die Ladezeit in den umliegenden kleineren Geschäften, Bars, Cafés oder im Biergarten. Zudem wurde festgestellt, dass 5% aller auf dem Parkplatz parkenden Pkw E-Autos sind.

Bestimmen Sie basierend auf den Ergebnissen der Studie, die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_4: „Unter elf Ladevorgängen erfolgen genau neun in der Zeit, in der die Besitzer der Fahrzeuge im Einkaufszentrum verweilen.“

E_5: „Unter 50 Ladevorgängen erfolgen mehr als neun aber weniger als 18 in der Zeit, in der die Besitzer der Fahrzeuge nicht im Einkaufszentrum verweilen.“

E_6: „Unter 100 auf dem Parkplatz parkenden Pkw sind mehr E-Autos als nach der Studie zu erwarten wären.“ **(6BE)** Lösung S.41 Lösungsvideo

$\sum 23$

TEIL 2: mit Hilfsmittel - Stochastik II

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Am Pausenverkauf einer großen Mädchenschule kaufen an einem Tag erfahrungsgemäß 30% aller Schülerinnen eine Breze. Es werden 20 Schülerinnen an einem bestimmten Tag zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele von diesen am betrachteten Tag eine Breze kaufen.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_1: „Nur die letzten beiden Schülerinnen kaufen eine Breze,“
E_2: „Genau zehn der Schülerinnen kaufen eine Breze.“ **(3BE)**

Lösung S.42 Lösungsvideo

1.2 Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang. **(2BE)**

Lösung S.42 Lösungsvideo

1.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. **(4BE)**

Lösung S.43 Lösungsvideo

1.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:
E_3: „Mehr als doppelt so viele Schülerinnen wie erwartet kaufen eine Breze.“ **(3BE)**

Lösung S.43 Lösungsvideo

2.0 In einer Urne befinden sich sechs grüne, eine rote und eine blaue Kugel. Ein Zufallsexperiment besteht darin, nacheinander jeweils zufällig eine Kugel ohne Zurücklegen zu ziehen und deren Farbe festzustellen. Es wird so lange gezogen, bis die blaue Kugel erscheint, höchstens jedoch dreimal.

2.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller zehn Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **(5BE)**

Lösung S.44 Lösungsvideo

2.2 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:
A: „Es werden alle drei Farben gezogen.“
B: „Das Zufallsexperiment endet mit der blauen Kugel.
Berechnen Sie nachvollziehbar die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B.
[Teilergebnis: $P(B)=\frac{3}{8}$] **(3BE)**

Lösung S.45 Lösungsvideo

2.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass insgesamt drei Kugeln gezogen werden unter der Bedingung, dass das Zufallsexperiment mit der blauen Kugel endet. **(3BE)**

Lösung S.45 Lösungsvideo

$\sum 23$

TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Analysis **LÖSUNG**

1. Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_g = [-3; 3]$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.1. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion g auf Symmetrie zum Koordinatensystem. **(2BE)**

Da alle x-Potenzen gerade sind und die Definitionsmenge symmetrisch ist, gilt:
G_g verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse.
oder
$g(-x) = -\frac{1}{4}(-x)^4 + 2(-x)^2 = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 = g(x)$

→ Da die Definitionsmenge symmetrisch ist folgt, dass G_g achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.

Zurück zur Aufgabe

1.2 Ermitteln Sie alle Extremstellen der Funktion g. **(4BE)**

$$\begin{aligned} g'(x) &= -x^3 + 4x \\ 0 &= -x^3 + 4x \\ 0 &= x(-x^2 + 4) \end{aligned}$$

1. $x_1 = 0$ (einfach)

2. $-x^2 + 4 = 0 \quad | + x^2$

$x^2 = 4 \quad |\sqrt{}$

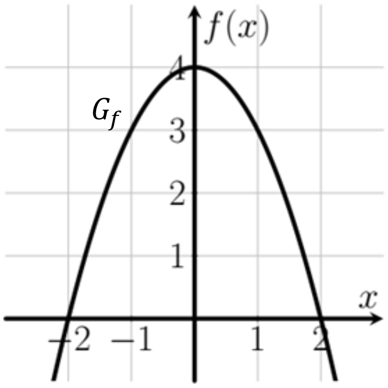
$x_2 = -2 \quad x_3 = 2$ (jeweils einfach)

Da die Nullstellen jeweils eine einfache Vielfachheit besitzen, handelt es sich jeweils um Extremstellen.

Da $D_g = [-3; 3]$ gilt, gibt es noch Randextremstellen bei $x_4 = -3$ und $x_5 = 3$.

Zurück zur Aufgabe

2. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f zweiten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



2.1 Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. **(4BE)**

Zunächst muss $f(x)$ bestimmt werden. Anhand der Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse erkennt man, dass f bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ jeweils einfache Nullstellen besitzt und kann damit die Nullstellenform aufstellen.

$f(x) = a \cdot (x-2)(x+2)$

Da G_f die y-Achse bei $y = 4$ schneidet, können die Koordinaten des Punktes $P(0|4)$ in die Funktionsgleichung eingesetzt werden, um a zu bestimmen.

$a \cdot (-2) \cdot 2 = 4$

$a \cdot (-4) = 4 \rightarrow a = -1;$

$f(x) = c \cdot x^n$

$F(x) = \frac{c}{n+1} \cdot x^{n+1}$

Maßzahl des Flächeninhalts:

$$\int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)\right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = -\frac{16}{3} + 16 = -\frac{16}{3} + \frac{48}{3} = \frac{32}{3}$$

Zurück zur Aufgabe

2.2 Die Funktion F mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_F bezeichnet.
Beschreiben Sie den Globalverlauf des Graphen G_F in Worten. Gehen Sie auch auf das Monotonieverhalten, die Lage und die Art der Extremstellen sowie auf die Lage der Wendestelle von F ein. **(4BE)**

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + C$

Globalverlauf: G_F verläuft von „links oben“ nach „rechts unten“

oder: G_F verläuft vom II. Quadranten in den IV. Quadranten und es gilt:

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$

Monotonieverhalten:

G_F ist sms im Intervall von $[-2; 2]$.

G_F ist smf in den Intervallen von $]-\infty; -2]$ und $[2; +\infty[$.

Lage und Art der Extremstellen:

relative Minimalstelle bei $x = -2$ und relative Maximalstelle bei $x = 2$;

Wendestelle

F hat eine Wendestelle bei $x = 0$

Zurück zur Aufgabe

3. Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. **(3BE)**
$(e^x)^2 - 25 = 0$

$(e^x)^2 - 25 = 0$

$(e^x)^2 = 25$

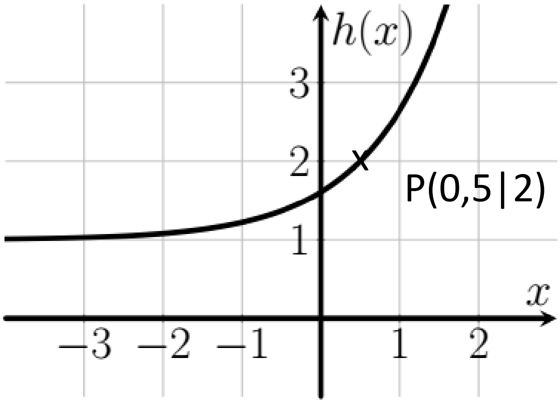
1. $e^x = -5 \rightarrow$ keine Lösung;

2. $e^x = 5 \quad |ln$

$x_1 = \ln(5)$

Zurück zur Aufgabe

4. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer Exponentialfunktion h mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$. Der zugehörige Funktionsterm besitzt die Form $h(x) = e^{x+d} + y_0$ mit $d, y_0 \in \mathbb{R}$.



4.1 Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung nachvollziehbar die Werte der Parameter d und y_0. **(3BE)**

$y_0 = 1$, da $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$ bzw. G_h hat eine waagrechte Asymptote bei $y = 1$.

Setzte die Koordinaten von $P(0{,}5|2)$ in die Funktionsgleichung ein und löse nach d auf:

$2 = e^{0{,}5+d} + 1 \quad | -1$

$1 = e^{0{,}5+d} \quad | ln$

$\ln(1) = 0{,}5 + d \quad$ (mit $\ln(1) = 0$)

$d = \ln(1) - 0{,}5 = -0{,}5$

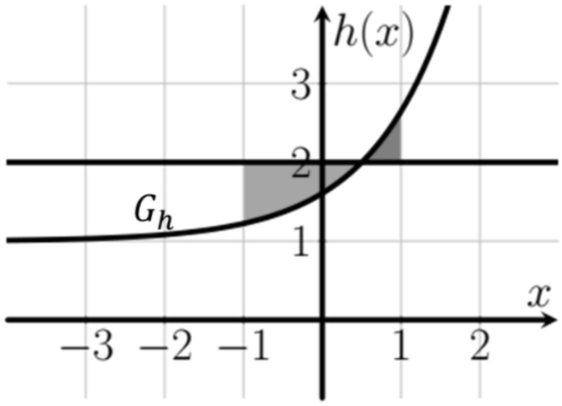
Zurück zur Aufgabe

4.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen der Funktion h, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen dazu in der Abbildung unter 4.0.

$$\int_{-1}^{1} \big(2 - h(x)\big)dx > 0$$

(2BE)

Die Aussage ist wahr. Vergleiche dazu die Veranschaulichung in der Abbildung



Zurück zur Aufgabe

TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Stochastik **LÖSUNG**

1. Bei einem Glücksradspiel beträgt der Einsatz 2€, maximal werden 5€ ausbezahlt. Die Zufallsgröße X gibt den Nettogewinn bei diesem Spiel (in Euro) an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X kann mithilfe der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ wie folgt dargestellt werden:

x	-2	-1	$0{,}5$	$1{,}5$	3
$P(X = x)$	$0{,}20$	a	$0{,}20$	b	$0{,}10$

1.1 Erläutern Sie, was der Ausdruck „faires Spiel“ im Zusammenhang mit Glücksspielen bedeutet und nennen Sie eine Bedingung, die von der hier dargestellten Zufallsgröße X erfüllt werden muss, damit das beschriebene Glücksspiel fair ist. **(2BE)**

Ein faires Spiel hat man dann, wenn auf lange Sicht bei keinem der Spielteilnehmer ein Gewinn bzw. Verlust erwartet wird.
Voraussetzung dafür ist, dass $E(X) = 0$ gilt.

Zurück zur Aufgabe

1.2 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass es sich bei diesem Glücksradspiel um ein faires Spiel handelt. **(4BE)**

(I) $0{,}20 + a + 0{,}20 + b + 0{,}10 = 1$

$0{,}50 + a + b = 1 \rightarrow a = 0{,}5 - b$

(II) $-2 \cdot 0{,}20 + (-1) \cdot a + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 1{,}5 \cdot b + 3 \cdot 0{,}10 = 0$

$-0{,}40 - a + 0{,}1 + 1{,}5b + 0{,}30 = 0$

$-a + 1{,}5b = 0$

Aus (I) in (II): $-(0{,}5 - b) + 1{,}5b = 0$

$-0{,}5 + b + 1{,}5b = 0 \quad | + 0{,}5$

$2{,}5b = 0{,}5 \quad |: 2{,}5$

$b = \frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$\rightarrow a = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

Zurück zur Aufgabe

2. Ein Gaststättenverband hat unter 1500 Touristen in der Fränkischen Schweiz eine Befragung durchgeführt, um zu erfahren, ob die Touristen die heimischen Biergärten besuchen (B). Dabei wurde zwischen Personen, die eine Tagestour bei einem Veranstalter gebucht haben (V), und Individualtouristen ($\overline{V}$) unterschieden. Tausend der Befragten gaben an, keine Tagestour bei einem Veranstaltet gebucht zu haben. Von den Touristen, die sich für eine Tagestour entschieden hatten, besuchten 80% einen Biergarten. Nur 300 aller Befragten gaben an, keinen Biergarten besucht zu haben.

Anmerkung: Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

2.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel den Anteil der Touristen, die entweder eine Tagestour bei einem Veranstalter gebucht haben oder einen Biergarten in der Fränkischen Schweiz besucht haben. **(4BE)**

$P_V(B) = 0{,}8;\ P(B \cap V) = P_V(B) \cdot P(V) = 0{,}8 \cdot 500 = 400;$

	V	$\overline{V}$	Σ
B	400	800	1200
$\overline{B}$	100	200	300
Σ	500	1000	1500

$$P(V \cap \overline{B}) + P(\overline{V} \cap B) = \frac{100}{1500} + \frac{800}{1500}$$
$$= \frac{900}{1500} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Oder:

$$P(V \cup B) - P(V \cap B) = \frac{1300}{1500} - \frac{400}{1500} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Zurück zur Aufgabe

2.2 Begründen Sie, ob der Gaststättenverband mit der folgenden Behauptung recht hat:

„Die Biergärten in der Fränkischen Schweiz sind für alle Touristen gleich attraktiv, egal ob zuvor eine Tagestour bei einem Veranstalter gebucht wurde oder nicht“. **(2BE)**

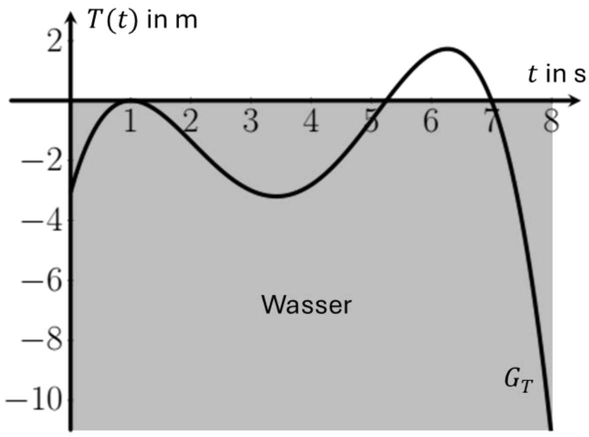
$P_V(B) = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$ $\quad P_{\overline{V}}(B) = \frac{800}{1000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ → Die Aussage ist korrekt.

Oder: $P(B) \cdot P(V) = \frac{1200}{1500} \cdot \frac{500}{1500} = \frac{4}{15} = P(B \cap V)$ → Die Aussage ist korrekt.

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I **LÖSUNG**

1.0 Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht. Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion T beschreiben.
Der Graph der Funktion T wird mit G_T bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im nebenstehenden Koordinatensystem abgebildet.



Die Funktion T ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

1.1 Beschreiben Sie anhand des Funktionsgraphen G_T den Bewegungsablauf des Delfins im Bereich von $t \approx 5{,}3$ bis $t = 7$ und erläutern Sie, ob für die Funktion T das Intervall $[0; \infty[$ für den beschriebenen Sachverhalt eine sinnvolle Definitionsmenge ist. **(2BE)**

Bei $t \approx 5{,}3$ springt der Delphin aus dem Wasser und taucht bei $t = 7$ wieder ein. Die Definitionsmenge ist nicht sinnvoll, da der Delfin laut Funktion dann langfristig unendlich tief tauchen würde.

Zurück zur Aufgabe

1.2 Der Leitkoeffizient im Funktionsterm von T ist gegeben durch $a = -\frac{1}{12}$. Zudem ist bekannt, dass G_T den Schnittpunkt $S(0|-\frac{28}{9})$ mit der Ordinatenachse besitzt. Die zwei ganzzahligen Nullstellen von T können der Zeichnung entnommen werden.
Berechnen Sie den exakten Wert der fehlenden Nullstelle von T. **(4BE)**

Aus dem Graphen kann man erkennen, dass die Funktion T eine doppelte Nullstelle bei $x = 1$ und eine einfache Nullstelle bei $t = 7$ besitzt. Da der Leitkoeffizient bekannt ist, kann die Funktionsgleichung wie folgt angegeben werden.

$T(t) = -\frac{1}{12}(t-1)^2(t-7)(t-t_1)$

t_1 beschreibt die noch unbekannte Nullstelle. Um t_1 zu erhalten können nun noch die Koordinaten von S eingesetzt werden.

$$-\frac{28}{9} = -\frac{1}{12}(0-1)^2(0-7)(0-t_1)$$

$$-\frac{28}{9} = -\frac{1}{12}(-1)^2(-7)(-t_1)$$

$$-\frac{28}{9} = \frac{7}{12}\cdot(-t_1) \qquad |\cdot\left(-\frac{12}{7}\right)$$

$$t_1 = \frac{16}{3}$$

Zurück zur Aufgabe

1.3.0 Die Funktion T ist gegeben durch die Funktionsgleichung
$T(t) = -\frac{1}{12}\left(t^4 - \frac{43}{3}t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_T = [0;8]$.
Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.

1.3.1 Bestimmen Sie die Wertemenge W_T der Funktion T und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. **(9BE)**

Um die Wertemenge bestimmen zu können, werden die Koordinaten aller Extrempunkte benötigt. Dazu benötigt man die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion.

$$T(t) = -\frac{1}{12}\left(t^4 - \frac{43}{3}t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3}\right)$$

$$T'(t) = -\frac{1}{12}(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87)$$

$$-\frac{1}{12}(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87) = 0 \qquad |:\left(-\frac{1}{12}\right)$$

$$4t^3 - 43t^2 + 126t - 87 = 0$$

Die erste Nullstelle wird geraten: $t_1 = 1$
Die weiteren Nullstellen können nun mithilfe der Polynomdivision bestimmt werden.

$$\begin{array}{l}
(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87):(t-1) = 4t^2 - 39t + 87 \\
-(4t^3 - 4t^2) \\
\hline
\quad -39t^2 + 126t - 87 \\
\quad -(-39t^2 + 39t) \\
\hline
\qquad 87t - 87 \\
\qquad -(87t - 87) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$4t^2 - 39t + 87 = 0$$

$$t_{2,3} = \frac{39 \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 87}}{2 \cdot 4}$$

$$t_2 = \frac{39 - \sqrt{129}}{8} \approx 3{,}46 \text{ (einfach, VZW)}$$

$$t_3 = \frac{39 + \sqrt{129}}{8} \approx 6{,}29 \text{ (einfach, VZW)}$$

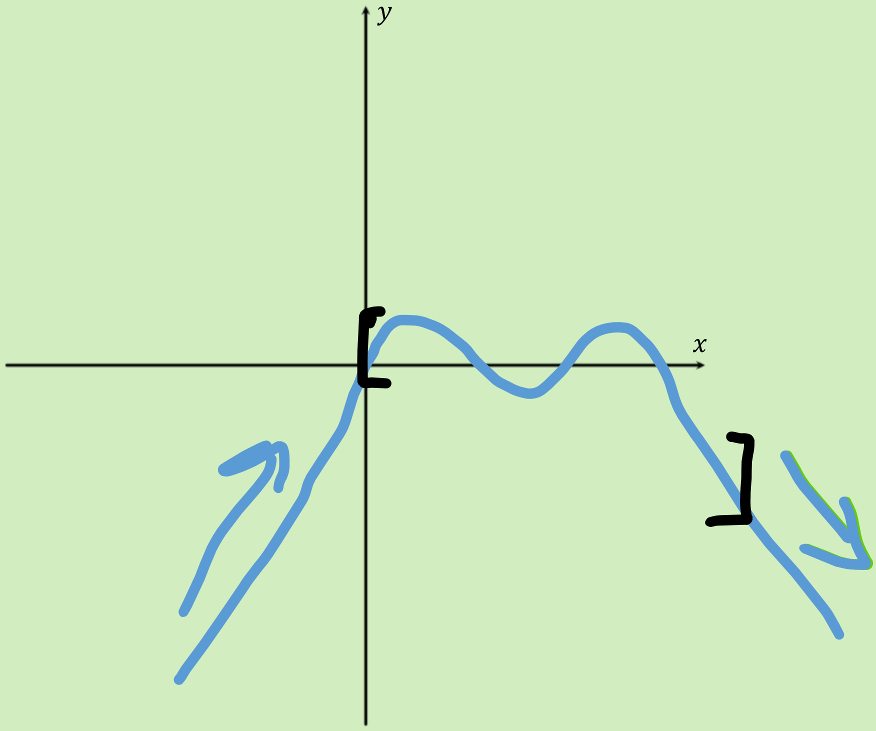
Vorzeichentabelle

x	(0)	$t_1 = 1$		$t_2 = \frac{39-\sqrt{129}}{8}$		$t_3 = \frac{39+\sqrt{129}}{8}$	
$T'(t)$	$+++$	0	$---$	0	$+++$	0	$---$
G_T	↗	HOP	↘	TIP	↗	HOP	↘

1. Möglichkeit:
Setze einen Probewert in T' ein, um die Vorzeichentabelle auszufüllen: $T'(0) = \frac{87}{12} > 0\ (+)$

2. Möglichkeit: Skizze zum Globalverlauf von G_T

Globalverlauf von G_T. Da der Leitkoeffizient negativ und die höchste Potenz 4 ist verläuft der Graph von links unten nach rechts unten.



$T(t) = -\frac{1}{12}\left(t^4 - \frac{43}{3}t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3}\right)$

Randextrempunkte:

$T(0) = -\frac{1}{12}\left(0^4 - \frac{43}{3} \cdot 0^3 + 63 \cdot 0^2 - 87 \cdot 0 + \frac{112}{3}\right) = -3{,}11 \approx \rightarrow T_1(0|-3{,}11)$

$T(8) = -\frac{1}{12}\left(8^4 - \frac{43}{3} \cdot 8^3 + 63 \cdot 8^2 - 87 \cdot 8 + \frac{112}{3}\right) = -\frac{98}{9} \approx -10{,}89 \rightarrow T_2(0|-10{,}89)$

Extrempunkte:

$T(1) = -\frac{1}{12}\left(1^4 - \frac{43}{3} \cdot 1^3 + 63 \cdot 1^2 - 87 \cdot 1 + \frac{112}{3}\right) = 0 \rightarrow H_1(1|0)$

$T\left(\frac{39-\sqrt{129}}{8}\right) \approx 3{,}46 \rightarrow T_3(3{,}46|-3{,}34)$

$T\left(\frac{39+\sqrt{129}}{8}\right) \approx 1{,}58 \rightarrow H_2(6{,}92|1{,}58)$

Hinweis: Es hätte gereicht nur die Koordinaten von T_2 und H_2 zu berechnen und auf den Graphen zu verweisen.

Der Graph hat einen absoluten Tiefpunkt bei $T_2(0|-10{,}89)$ und einen absoluten Hochpunkt bei $H_2(6{,}92|1{,}58)$.

Damit gilt für die Wertemenge $W_T = [-10{,}89; 1{,}58]$

Interpretation: Der Delfin erreicht im betrachteten Bereich eine maximale Tiefe von ca. 10,89 Metern und eine maximale Höhe von ca. 1,58 Metern.

Zurück zur Aufgabe

1.3.2 Für $t \in]1; 5{,}3[$ befindet sich der Delfin unter Wasser. Ermitteln Sie rechnerisch, ob in diesem Zeitintervall der Betrag der größten Abtauchgeschwindigkeit größer als der Betrag der größten Auftauchgeschwindigkeit ist. **(6BE)**

Erklärung zum folgenden Vorgehen:
Der Graph der Funktion gibt die aktuelle Höhe des Delfins zu einer bestimmten Zeit an.
Die Steigung der Funktion an einer bestimmten Stelle, gibt die momentane Änderungsrate an, und ist durch die Steigung der Tangente des Funktionsgraphen an dieser Stelle definiert.
Zeichnet man ein Steigungsdreieck ein, dann erkennt man anhand der x- und y-Werte, dass die Einheit der Steigungswerte m/s ist, also eine Geschwindigkeit beschreibt.
Die größte bzw. kleinste Geschwindigkeit sind dann die Extremstellen der ersten Ableitung.
Gesucht sind also die Wendestellen der Funktion.
Allgemein: Wird ein Zeit-Orts-Graph angegeben, dann beschreibt die erste Ableitung die Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit und die zweite Ableitung die Beschleunigung zu einer bestimmten Zeit.

$$T'(t) = -\frac{1}{12}(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87)$$

$$T''(t) = -\frac{1}{12}(12t^2 - 86t + 126)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{12}(12t^2 - 86t + 126) &= 0 \\ 12t^2 - 86t + 126 &= 0 \\ t_{1,2} &= \frac{86 \pm \sqrt{86^2 - 4 \cdot 12 \cdot 126}}{2 \cdot 12} \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{43 - \sqrt{337}}{12} \approx 2{,}05; \qquad t_2 = \frac{43 + \sqrt{337}}{12} \approx 5{,}11;$$

Mithilfe des Graphen sieht man, dass an der Stelle $x_1 \approx 2{,}05$ die größte Abtauchgeschwindigkeit und an der Stelle $x_2 \approx 5{,}11$ die größte Auftauchgeschwindigkeit ist. Um den betragsmäßigen Wert der jeweiligen Geschwindigkeit zu bestimmen, müssen x_1 und x_2 nun noch in erste Ableitungsfunktion eingesetzt werden.

$$T'\left(\frac{43-\sqrt{337}}{12}\right) = -\frac{1}{12}\left(4 \cdot \left(\frac{43-\sqrt{337}}{12}\right)^3 - 43 \cdot \left(\frac{43-\sqrt{337}}{12}\right)^2 + 126 \cdot \frac{43-\sqrt{337}}{12} - 87\right)$$

$$T'\left(\frac{43-\sqrt{337}}{12}\right) \approx -2{,}09$$

$$T'\left(\frac{43+\sqrt{337}}{12}\right) = -\frac{1}{12}\left(4 \cdot \left(\frac{43+\sqrt{337}}{12}\right)^3 - 43 \cdot \left(\frac{43+\sqrt{337}}{12}\right)^2 + 126 \cdot \frac{43+\sqrt{337}}{12} - 87\right)$$

$$T'\left(\frac{43+\sqrt{337}}{12}\right) \approx 2{,}69$$

A: Der Betrag der größten Abtauchgeschwindigkeit ist geringer als der Betrag der größten Auftauchgeschwindigkeit.

Zurück zur Aufgabe

2.0 An einem Küstenabschnitt stranden immer wieder Delfine. Diese werden in einer Auffangstation gesund gepflegt, bis sie wieder in freier Natur überleben können. Um die Kapazität der Auffangstation zu erhöhen, soll ein zusätzliches Becken aus Edelstahl angefertigt werden, welches die Form eines geraden Kreiszylinders hat und nach oben offen ist. Dazu steht ein begrenzter Vorrat an Edelstahlblechen zur Verfügung. Diese haben modellhaft insgesamt eine Fläche von $180\pi m^2$. Aus Platzgründen kann das Becken nur einen maximalen Durchmesser von $20\ m$ haben.
Die Funktion $V\colon r \mapsto V(r)$ beschreibt die Maßzahl des Volumens des Beckens in Kubickmetern in Abhängigkeit von Radius r in Metern.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.

2.1 Stelle Sie eine Gleichung der Funktion V auf. Begründen Sie, dass für die mathematisch maximale Definitionsmenge der Funktion V gilt: $D_V =]0;10]$ **(5BE)**

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r$]

Hauptbedingung: $V_{Zylinder}(r,h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Nebenbedingung:

$$A_{Zylinder} = r^2\pi + 2r\pi h$$

$$180\pi = r^2\pi + 2r\pi h \qquad |:\pi$$

$$180 = r^2 + 2rh \qquad |-r^2$$

$$180 - r^2 = 2rh \qquad |:(2r)$$

$$\frac{180-r^2}{2r} = h$$

Zielfunktion:

$$V_{Zylinder}(r) = r^2\pi \cdot \frac{180-r^2}{2r}$$

$$V_{Zylinder}(r) = \frac{180r^2\pi - r^4\pi}{2r}$$

$$V_{Zylinder}(r) = 90r\pi - \frac{1}{2}r^3\pi$$

Begründung Definitionsmenge:

r muss größer als 0 sein, da r eine Länge darstellt.

r muss kleiner gleich 10 sein, da in der Angabe steht, dass der Durchmesser maximal $20\ m$ groß sein darf und allgemein gilt: $2r = d$ (zwei Mal der Radius ergibt immer den Durchmesser).

Zurück zur Aufgabe

2.2 Zeigen Sie, dass unter den oben genannten Vorgaben das Becken für einen Radius von $r = 2\sqrt{15}$ den maximalen Rauminhalt aufweist. Überprüfen Sie anschließend, ob dieses Becken für eine vorübergehende Haltung von drei Delfinen ausreicht, wenn pro Delfin $360m^3$ Wasser zur Verfügung stehen sollen. **(7BE)**

Wir müssen den Radius für das maximale Volumen bestimmen. Dazu benötigen wir die Nullstelle der ersten Ableitung.

$V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r$ $D_V =]0;10[$ (aus Angabe)

$V'(r) = -\frac{3}{2}\pi r^2 + 90\pi$

$-\frac{3}{2}\pi r^2 + 90\pi = 0 \quad | -90\pi$

$-\frac{3}{2}\pi r^2 = -90\pi \quad |:(-\frac{3}{2}\pi)$

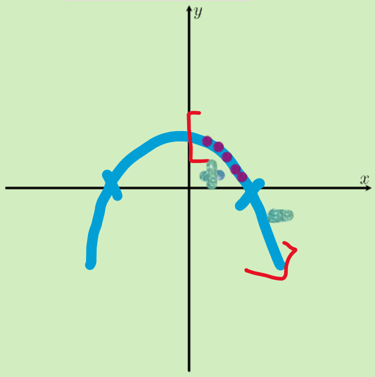
$r^2 = 60$

$r_1 = -\sqrt{60} \notin D_V$; $r_2 = \sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15} \approx 7{,}75$; (einfach, VZW)

VZT:	(1)		
	$0 < r < 2\sqrt{15}$	$r = 2\sqrt{15}$	$2\sqrt{15} < r < 10$
$V'(r)$	$+++$	0	$---$
G_V	↗	HOP	↘

Probewert: $V'(1) = -\frac{1}{2}\pi \cdot 1^3 + 90\pi \cdot 1 = 89{,}5\pi > 0$ (+++)

oder: Skizze von $G_{V'}$



→ G_V hat einen absoluten HOP bei $r = 2\sqrt{15}$

$V_{max} = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r = -\frac{1}{2}\pi \cdot (2\sqrt{15})^3 + 90\pi \cdot 2\sqrt{15} \approx 1460{,}08\ [m^3]$

$1460{,}08 : 360 \approx 4{,}06$

➔ Es ist sogar Platz für bis zu 4 Delfine

Zurück zur Aufgabe

2.3 Berechnen Sie für den unter 2.2 gegebenen Beckenradius die Größe der Grundfläche des Beckens A_0 in Quadratmetern. **(2BE)**
[Ergebnis: $A_0 \approx 188{,}5m^2$]

$A_0 = r^2\pi = \left(2\sqrt{15}\right)^2 \cdot \pi \approx 188{,}5\ [m^2]$

Zurück zur Aufgabe

2.4.0 Ein zu Beginn (Zeitpunkt $t_0 = 0$) $0{,}5m^2$ großer Algenteppich, der sich am Boden des Beckens mit der Grundfläche A_0 (siehe 2.3) gebildet hat, verdoppelt seine Fläche täglich.

2.4.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $A: t \mapsto A(t)$ auf, welche die Fläche des Algenteppichs in Quadratmetern in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen angibt. Für die Definitionsmenge der Funktion A gilt $D_A = [0; 8]$. **(2BE)**

$A(t) = 0{,}5 \cdot 2^t$

Zurück zur Aufgabe

2.4.2 Zeigen Sie, dass sich die Wachstumsfunktion A näherungsweise durch die Funktionsgleichung $\tilde{A}(t) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}6931 \cdot t}$ mit $D_{\tilde{A}} = D_A$ darstellen lässt und berechnen Sie damit, nach wie vielen Tagen zwei Drittel der gesamten Grundfläche des Beckens von Algen bedeckt wären, wenn nicht eingegriffen würde. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Tage. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. **(6BE)**

$0{,}5 \cdot 2^t = 0{,}5 \cdot e^{\ln(2^t)} = 0{,}5 \cdot e^{\ln(2)\cdot t} \approx 0{,}5 \cdot e^{0{,}6931 \cdot t}$
➔ $\tilde{A}(t) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}6931 \cdot t}$

Verwendete Regeln:
$a^t = e^{\ln(a^t)}$
$\ln(a^t) = t \cdot \ln(a)$

Wir bestimmen den Wert für zwei Drittel der gesamten Grundfläche. Die Maßzahl der Grundfläche 188,5 m^2 ist aus Aufgabe 2.3 bekannt.
$\frac{2}{3}A_0 \approx \frac{2}{3} \cdot 188{,}5 \approx 125{,}67\ [m^2]$

Nun wird bestimmt nach welcher Zeit $125{,}67m^2$ der Grundfläche des Beckens mit Algen bedeckt ist:

$125{,}67 = 0{,}5 \cdot e^{0{,}6931 \cdot t} \quad |:0{,}5$
$251{,}34 = e^{0{,}6931 \cdot t}$
$\rightarrow 0{,}6931 \cdot t = \ln(251{,}34) \quad |:0{,}6931$
$t = \frac{\ln(251{,}34)}{0{,}6931} \approx 7{,}97 \approx 8$ [Tage]

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II **LÖSUNG**

1. Der Graph der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ schneidet in einem kartesischen Koordinatensystem die y-Achse beim Wert $y = 2$ und verläuft durch den Extrempunkt $E(2|1{,}2)$. Außerdem ist bekannt, dass der Funktionsterm durch $f(x) = ax^3 + bx^2 - 0{,}9x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ dargestellt werden kann.

y $P(0|2)$ x

1.1. Bestimmen Sie im Funktionsterm von f die Werte der Parameter a, b und $c \in \mathbb{R}$. **(6BE)**

$f(x) = ax^3 + bx^2 - 0{,}9x + c$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 0{,}9$

(I) $P(0|2)$; $f(0) = 2$;
$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 - 0{,}9 \cdot 0 + c = 2 \rightarrow c = 2$

(II) $f'(2) = 0$
$3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 - 0{,}9 = 0$
$12a + 4b - 0{,}9 = 0$

(III) $E(2|1{,}2)$; $f(2) = 1{,}2$;
$a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 0{,}9 \cdot 2 + 2 = 1{,}2$
$8a + 4b - 1{,}8 + 2 = 1{,}2$
$8a + 4b + 0{,}2 = 1{,}2$

Aus (II): $12a + 4b - 0{,}9 = 0 \quad | -12a + 0{,}9$
$4b = -12a + 0{,}9 \quad |:4$
$b = -3a + \frac{9}{40}$

b in (III):

$8a + 4\left(-3a + \frac{9}{40}\right) + 0{,}2 = 1{,}2$

$8a - 12a + \frac{9}{10} + 0{,}2 = 1{,}2$

$8a - 12a + \frac{9}{10} + 0{,}2 = 1{,}2$

$-4a + 1{,}1 = 1{,}2 \quad | -1{,}1$

$-4a = 0{,}1 \quad |:(-4)$

$a = -0{,}025$

a in b: $b = -3 \cdot (-0{,}025) + \frac{9}{40} = 0{,}3$

$\rightarrow f(x) = -0{,}025x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}9x + 2$

Zurück zur Aufgabe

1.2. Im Folgenden wird die Funktion g mit $g(x) = f(x) = -0{,}025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)$ und der Definitionsmenge $D_g = [0; 7]$ betrachtet. Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

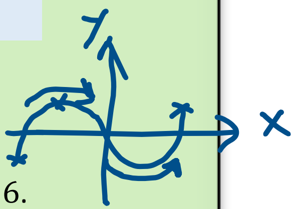
1.2.1. Bestimmen Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_g und geben Sie die Wertemenge W_g von g an. **(9BE)**

$$\begin{aligned}
g(x) &= -0{,}025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80)\\
g'(x) &= -0{,}025(3x^2 - 24x + 36)\\
0 &= -0{,}025(3x^2 - 24x + 36) \qquad |:(-0{,}025)\\
0 &= 3x^2 - 24x + 36\\
x_{1,2} &= \frac{+24 \pm \sqrt{24^2 - 4\cdot 3\cdot 36}}{2\cdot 3} = \frac{24 \pm \sqrt{144}}{6} = \frac{24 \pm 12}{6}\\
x_1 &= 2 \in D_g; \quad x_2 = 6 \in D_g; \quad \text{(jeweils einfach)}
\end{aligned}$$

Faktorregel

$f(x) = a \cdot u(x)$

$f'(x) = a \cdot u'(x)$



1. Möglichkeit: $g''(x) = -0{,}025(6x - 24)$;

$g''(2) = -0{,}025(6\cdot 2 - 24) = 0{,}3 > 0 \rightarrow g$ hat lokales Minimum bei $x = 2$.

$g''(6) = -0{,}025(6\cdot 6 - 24) = -0{,}3 < 0 \rightarrow g$ hat lokales Maximum bei $x = 6$.

Ob der Graph an diesen Stellen absolute Extrempunkte besitzt wird weiter unten überprüft.

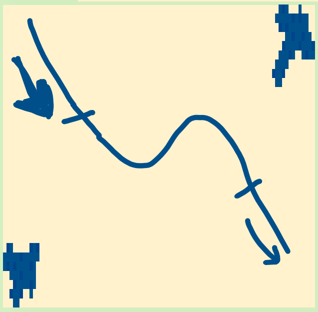
2. Möglichkeit:

VZT:

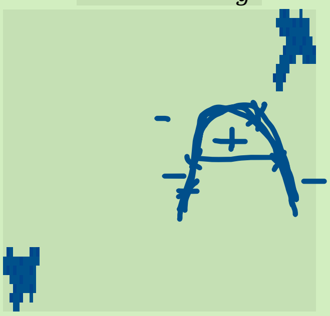
	$x = 0$	$0 < x < 2$ (1)	$x = 2$	$2 < x < 6$	$x = 6$	$6 < x < 7$	$x = 7$
$g'(x)$	$-$	$---$	0	$+++$	0	$---$	$-$
G_g	RandHOP	↘	TIP	↗	HOP	↘	RandTIP

Probewert: $g'(1) = -0{,}025(3\cdot 1^2 - 24\cdot 1 + 36) = -0{,}375 < 0$ (---)

oder: Globalverlauf von G_g



oder: Skizze von $G_{g'}$



Koordinaten aller Extrempunkte:

$g(0) = -0{,}025(0^3 - 12\cdot 0^2 + 36\cdot 0 - 80) = 2 \rightarrow$ absoluter Randhochpunkt bei $H_1(0|2)$

$g(2) = -0{,}025(2^3 - 12\cdot 2^2 + 36\cdot 2 - 80) = \frac{6}{5} \rightarrow$ absoluter Tiefpunkt bei $T_1(2|\frac{6}{5})$

$g(6) = -0{,}025(6^3 - 12\cdot 6^2 + 36\cdot 6 - 80) = 2 \rightarrow$ absoluter Hochpunkt bei $T_1(6|2)$

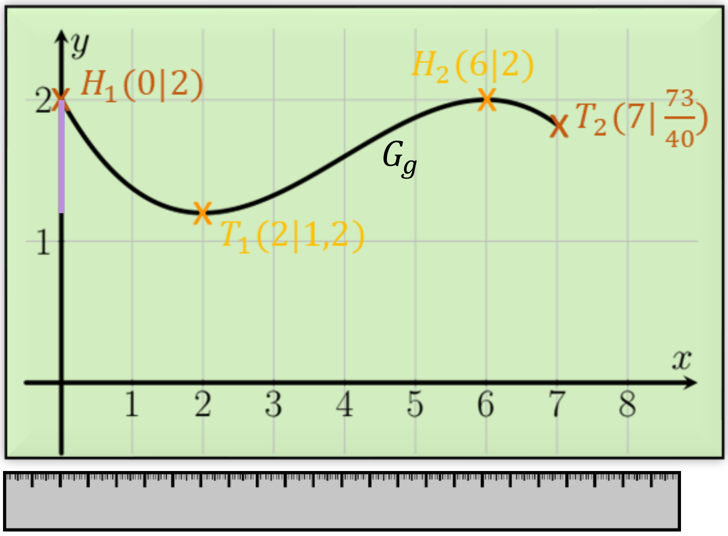
$g(7) = -0{,}025(7^3 - 12\cdot 7^2 + 36\cdot 7 - 80) = \frac{73}{40} \rightarrow$ relativer Randtiefpunkt bei $T_1(7|\frac{73}{40})$

$W_g = [1{,}2; 2]$

Zurück zur Aufgabe

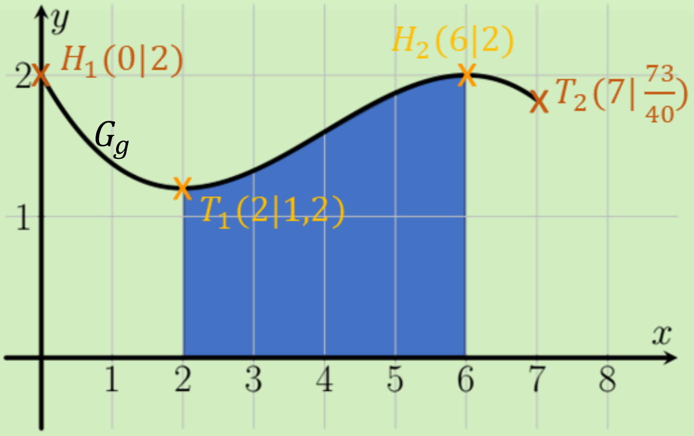
hier: Wertemenge

1.2.2. Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $0 \leq x \leq 7$ in ein Koordinatensystem. Maßstab für die x-Achse: $1LE = 1cm$, für die y-Achse: $1LE = 2cm$. **(4BE)**



Zurück zur Aufgabe

1.2.3 Der Graph G_g , die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = 2$ und $x = 6$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. **(3BE)**



$$\begin{aligned}
\int_2^6 g(x)\,dx &= \int_2^6 (-0{,}025(x^3 - 12x^2 + 36x - 80))\,dx \\
&= -0{,}025 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{12}{3}x^3 + \frac{36}{2}x^2 - 80x\right]_2^6 \\
&= -0{,}025 \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 80x\right]_2^6 \\
&= -0{,}025 \cdot (\tfrac{1}{4} \cdot 6^4 - 4 \cdot 6^3 + 18 \cdot 6^2 - 80 \cdot 6 - \\
&\qquad (\tfrac{1}{4} \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 80 \cdot 2)) \\
&= -0{,}025 \cdot (-372 - (-116)) \\
&= \frac{32}{5} \\
&= 6{,}4
\end{aligned}$$

Konstantenregel für Integrale

$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

Potenzregel für Integrale

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Zurück zur Aufgabe

2. Beim Aufladen des Akkus eines Smartphones fließt ein Ladestrom von 2000 Milliampere. Sobald der Akku optimal geladen ist, verringert das Ladegerät den Ladestrom um eine Überladung zu vermeiden.

Die Funktion I mit $I(t) = 2000 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{4{,}88}}$ und $t \in D_I \subset \mathbb{R}$ modelliert den Verlauf des Ladestroms ab dem Erreichen der optimalen Akkuladung zur Zeit $t = 0$ bis zur endgültigen Abschaltung des Ladegeräts zur Zeit $t_{end} > 0$. Die Funktionswerte von I entsprechen der Stärke des Ladestroms in Milliampere und t entspricht der Zeit in Minuten.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1. Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm näherungsweise auch in der Form $\tilde{I}(t) = 2000 \cdot e^{-0{,}142 \cdot t}$ schreiben lässt. **(3BE)**

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} 2000 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{4{,}88}} &= 2000 \cdot e^{\ln\left(0{,}5^{\frac{t}{4{,}88}}\right)} \\ &= 2000 \cdot e^{\frac{t}{4{,}88} \cdot \ln(0{,}5)} \\ &\approx 2000 \cdot e^{-0{,}142 \cdot t} \end{aligned}$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} 2000 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{4{,}88}} &= 2000 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{4{,}88} \cdot t} \\ &= 2000 \cdot \left(0{,}5^{\frac{1}{4{,}88}}\right)^t \\ &\approx 2000 \cdot 0{,}868^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2000 \cdot e^{-0{,}142 \cdot t} &= 2000 \cdot \left(e^{-0{,}142}\right)^t \\ &\approx 2000 \cdot 0{,}868^t \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

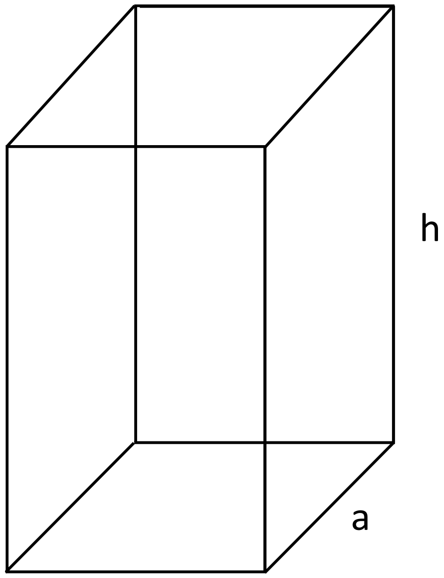
2.2. Das Ladegerät schaltet sich komplett ab, wenn die Ladestromstärke auf 100 Milliampere abgesunken ist. Ermitteln Sie t_{end} unter Verwendung des Funktionsterms aus 2.1 . Runden Sie das Ergebnis auf ganze Minuten und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für $\tilde{I}$ an. **(4BE)**

$$\begin{aligned} 100 &= 2000 \cdot e^{-0{,}142 \cdot t_{end}} && |:2000 \\ 0{,}05 &= e^{-0{,}142 \cdot t_{end}} && |ln \\ \ln(0{,}05) &= -0{,}142 \cdot t_{end} && |:(-0{,}142) \\ t_{end} &= \frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}142} \\ t_{end} &\approx 21 \text{ [Minuten]} \end{aligned}$$

$D_{\tilde{I}} = [0; 21]$

Zurück zur Aufgabe

3. Die Firma FACTUS soll für einen Süßwarenhersteller quaderförmige Verpackungen für Schokoladenbonbons produzieren. Der Auftraggeber verlangt, dass die Verpackung eine quadratische Grundfläche aufweist und dass die Summe aus Länge, Breite und Höhe $45\ cm$ beträgt, damit der Verpackungsautomat die gefalteten Verpackungen verarbeiteten und befüllen kann. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche wird mit a bezeichnet.
Die Werte der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ geben jeweils das Volumen der Verpackung in cm^3 an. Damit die Verpackung handlich bleibt, soll die Seitenlänge a der Grundfläche mindestens $10\ cm$ und höchstens $20\ cm$ betragen.



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.

3.1. Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion V. **(3BE)**
[Mögliches Ergebnis: $V(a) = 45a^2 - 2a^3$]

Hauptbedingung: $V(a,h) = a^2 \cdot h$

Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} a + a + h &= 45 \\ 2a + h &= 45 \qquad \mid -2a \\ h &= 45 - 2a \end{aligned}$$

Zielfunktion:

$$\begin{aligned} V(a) &= a^2 \cdot (45 - 2a) \\ V(a) &= 45a^2 - 2a^3 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

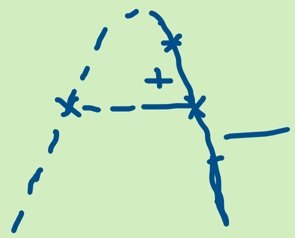
3.2. Ermitteln Sie die Maße einer Verpackung der Firma FACTUS, die den Vorgaben entspricht und dabei maximales Volumen besitzt. Geben Sie die spezielle Form dieser Verpackung an und berechnen Sie das Volumen. **(7BE)**

$$\begin{aligned} V(a) &= 45a^2 - 2a^3 \qquad D_V = [10; 20] \\ V'(a) &= 90a - 6a^2 \\ 0 &= 90a - 6a^2 \\ 0 &= a \cdot (90 - 6a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad a_1 &= 0 \notin D_V \\ 2.\ 90 - 6a &= 0 && | + 6a \\ 90 &= 6a && |:6 \\ a_2 &= 15 \in D_V && \text{(einfach, VZW)} \end{aligned}$$

VZT:	(10)				
	$a = 10$	$10 < a < 15$	$a = 15$	$15 < a < 20$	$a = 20$
$V'(a)$	$+$	$+++$	0	$---$	$-$
G_V	RandTIP	↗	HOP	↘	RandTIP

Probewert: $V'(10) = 90 \cdot 10 - 6 \cdot 10^2 = 300 > 0$ (+++)
oder: Skizze von $G_{V'}$



→ G_V hat einen absoluten HOP bei $a = 15$

$V_{max} = 45 \cdot 15^2 - 2 \cdot 15^3 = 3375\ [cm^3]$

Spezielle Form:

$a_{max} = 15$

→ (aus 3.1) $h_{max} = 45 - 2 \cdot 15 = 15$

→ Es handelt sich um einen Würfel.

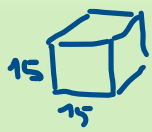
Zurück zur Aufgabe

3.3. Die Firma FACTUS bekommt den Auftrag, 6000 würfelförmige und bedruckte Verpackungen mit einer Kantenlänge von 15 cm herzustellen.
Aus Kostengründen überlegt die Firma, ob sie den Druckauftrag an die eigene Druckerei *FACTUS-Print* geben soll oder ob das Angebot der Konkurrenzfirma *PappDruck* günstiger ist. Bei den Verpackungen werden alle Außenflächen außer der Bodenfläche bedruckt.

	Druckkosten	Rabatt
FACTUS-Print	8 Cent pro 1000 cm^2	Kein Rabatt
PappDruck	9 Cent pro Verpackung	Bedruckung jedes 10. Würfels gratis

Entscheiden Sie rechnerisch, welche Firma aus wirtschaftlicher Sicht den Druckauftrag bekommen sollte. **(4BE)**

$FACTUS - Print$:



Wir berechnen die Maßzahl der Fläche pro Verpackung:

$O = 5 \cdot 15^2 = 1125\ [cm^2]$

Gesamtflächenmaßzahl:

$1125 \cdot 6000 = 6750000\ [cm^2]$

Kosten:

$\frac{6750000}{1000} \cdot 0{,}08€ = 540€$

$PappDruck$:

Anzahl der Gratiswürfel:

$\frac{6000}{10} = 600$

Anzahl der zu bezahlenden Würfel:

$6000 - 600 = 5400$

Kosten:

$5400 \cdot 0{,}09€ = 486€$

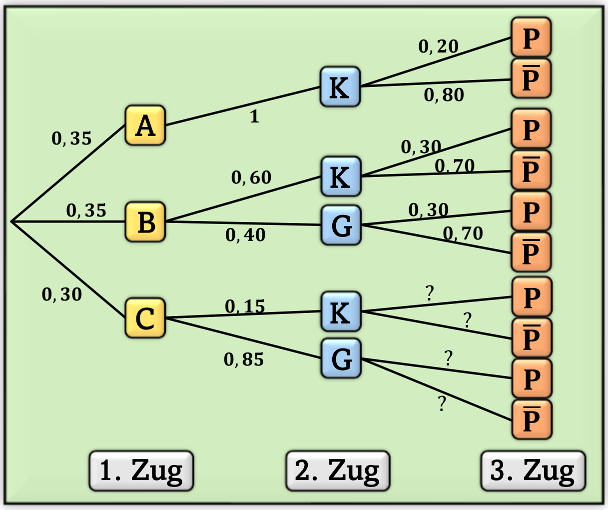
→ Aus wirtschaftlicher Sicht sollte die Firma $PappDruck$ den Druckauftrag bekommen.

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I **LÖSUNG**

1.0 Bei einem Hersteller von Elektroautos (E-Autos) können die Kunden beim Kauf eines Autos zwischen den Modellen A, B und C wählen. 30% der Kunden entscheiden sich für Modell C. Die restlichen Kunden wählen zu gleichen Teilen A bzw. B.
Die Modelle B und C werden mit einer kleinen (K) oder einer großen (G) Batterie angeboten. Das Modell A kann nur mit einer kleinen Batterie bestellt werden. Bei Modell B entscheiden sich vier von zehn Kunden für die große Batterie, während sich beim Modell C nur 15% der Kunden für die kleine Batterie entscheiden.
Zusätzlich können alle Modelle noch mit einem Autopilot (P) ausgestattet werden. Bei Modell B und C erfolgt die Wahl unabhängig von der Batteriegröße. Dieses Zusatzangebot wählen beim Modell A 20% der Kunden und beim Modell B jeweils 30%. Insgesamt werden 41,5% aller Fahrzeuge mit Autopilot gewünscht.
Die Wahl des Modells, der Batteriegröße und der Zusatzfunktion Autopilot eines beliebig herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller zehn Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **(6BE)**
[Teilergebnis: $P(\{C; K; P\}) = 0{,}036$]



$$P(AKP) + P(BKP) + P(BGP) + P(CKP) + P(CGP) = 0{,}415$$
$$0{,}35 \cdot 1 \cdot 0{,}20 + 0{,}35 \cdot 0{,}60 \cdot 0{,}30 + 0{,}35 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}30 + 0{,}30 \cdot 0{,}15 \cdot x + 0{,}30 \cdot 0{,}85 \cdot x = 0{,}415$$
$$\rightarrow\ 0{,}175 + 0{,}045x + 0{,}255x = 0{,}415$$
$$0{,}175 + 0{,}3x = 0{,}415$$
$$0{,}3x = 0{,}24 \qquad |:0{,}3$$
$$x = 0{,}8$$

ω	$(A;K;P)$	$(A;K;\overline{P})$	$(B;K;P)$	$(B;K;\overline{P})$	$(B;G;P)$	$(B;G;\overline{P})$	$(C;K;P)$	$(C;K;\overline{P})$	$(C;G;P)$	$(C;G;\overline{P})$
$P(\{\omega\})$	$0{,}35 \cdot 1 \cdot 0{,}20 = 0{,}07$	$0{,}35 \cdot 1 \cdot 0{,}80 = 0{,}28$	$0{,}35 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}063$	$0{,}35 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}147$	$0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}042$	$0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}098$	$0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 = 0{,}036$	$0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}009$	$0{,}4 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}204$	$0{,}4 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 = 0{,}051$

Zurück zur Aufgabe

1.2 Gegeben sind folgende Ereignisse:
E_1: „Ein zufällig ausgewählter Kunde wählt Modell A oder C jeweils mit Autopilot."
E_2: „Ein zufällig ausgewählter Kunde wählt entweder die kleine Batterie oder den Autopilot."

Berechnen Sie nachvollziehbar jeweils die Wahrscheinlichkeit für E_1 und für E_2. **(3BE)**

ω	$(A;K;P)$	$(A;K;\bar{P})$	$(B;K;P)$	$(B;K;\bar{P})$	$(B;G;P)$	$(B;G;\bar{P})$	$(C;K;P)$	$(C;K;\bar{P})$	$(C;G;P)$	$(C;G;\bar{P})$
$P(\{\omega\})$	$0{,}35 \cdot 1 \cdot 0{,}20 = 0{,}07$	$0{,}35 \cdot 1 \cdot 0{,}80 = 0{,}28$	$0{,}35 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}063$	$0{,}35 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}147$	$0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}042$	$0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}098$	$0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 = 0{,}036$	$0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}009$	$0{,}4 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}204$	$0{,}4 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 = 0{,}051$

$$P(E_1) = P(A;K;P) + P(C;K;P) + P(C;G;P) = 0{,}07 + 0{,}036 + 0{,}204 = 0{,}31$$

ω	$(A;K;P)$	$(A;K;\bar{P})$	$(B;K;P)$	$(B;K;\bar{P})$	$(B;G;P)$	$(B;G;\bar{P})$	$(C;K;P)$	$(C;K;\bar{P})$	$(C;G;P)$	$(C;G;\bar{P})$
$P(\{\omega\})$	$0{,}35 \cdot 1 \cdot 0{,}20 = 0{,}07$	$0{,}35 \cdot 1 \cdot 0{,}80 = 0{,}28$	$0{,}35 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}063$	$0{,}35 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}147$	$0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}042$	$0{,}35 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}098$	$0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 = 0{,}036$	$0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}009$	$0{,}4 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}204$	$0{,}4 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 = 0{,}051$

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A;K;\bar{P}) + P(B;K;\bar{P}) + P(B;G;P) + P(C;K;\bar{P}) + P(C;G;P) \\ &= 0{,}28 + 0{,}147 + 0{,}042 + 0{,}009 + 0{,}204 \\ &= 0{,}682 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

2.0 In einer Kleinstadt sind 30% aller zugelassenen Elektroautos der Oberklasse (O) zuzuordnen, die restlichen werden der Mittelklasse (M) zugeordnet. Die Akkus aller hier betrachteten Elektroautos werden zu 39,5 % regelmäßig über eine Photovoltaikanlage (V) des jeweiligen Fahrzeugeigners geladen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig aus all diesen Fahrzeugen ausgewähltes Elektroauto ein Modell der Oberklasse ist und regelmäßig über eine Photovoltaik-Anlage aufgeladen wird, beträgt 25,5 %.

2.1 Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_3 = \overline{M \cap V}$. **(4BE)**

	O	M	
V	0,255	0,14	0,395
$\bar{V}$	0,045	0,56	0,605
	0,30	0,70	1

$P(E_3) = P(\overline{M \cap V}) = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$

Oder:

$P(E_3) = P(\overline{M \cap V}) = P(\bar{M} \cup \bar{V}) = 0{,}255 + 0{,}045 + 0{,}56$

Zurück zur Aufgabe

2.2 Untersuchen Sie, ob der Anteil der Fahrzeuge, die über eine Photovoltaik-Anlage des Fahrzeugeigners geladen werden, bei den Oberklasse-Modellen höher ist als bei den Mittelklasse-Modellen. Entscheiden Sie anschließend, ob die Ereignisse M und V stochastisch unabhängig sind. **(4BE)**

	O	M	
V	0,255	0,14	0,395
$\bar{V}$	0,045	0,56	0,605
	0,30	0,70	1

$$P_O(V) = \frac{P(O \cap V)}{P(O)} = \frac{0{,}255}{0{,}30} = 0{,}85$$

$$P_M(V) = \frac{P(M \cap V)}{P(O)} = \frac{0{,}14}{0{,}70} = 0{,}2$$

→ Der Anteil ist bei den Oberklasse-Modellen höher als bei den Mittelklasse-Modellen.
→ M und V sind stochastisch abhängig.

Zurück zur Aufgabe

3. Am Parkplatz eines großen Einkaufszentrums wurde im Rahmen einer Bachelor-Arbeit eine langelegte Studie zum Laden von E-Autos an den dort vorhandenen Ladesäulen durchgeführt. Dieses lieferte folgende Ergebnisse: 80% der Ladevorgänge erfolgen während der Zeit, in der die Besitzer der Fahrzeuge im Einkaufszentrum verweilen. Alle anderen Besitzer verbringen die Ladezeit in den umliegenden kleineren Geschäften, Bars, Cafés oder im Biergarten. Zudem wurde festgestellt, dass 5% aller auf dem Parkplatz parkenden Pkw E-Autos sind.

Bestimmen Sie basierend auf den Ergebnissen der Studie, die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_4: „Unter elf Ladevorgängen erfolgen genau neun in der Zeit, in der die Besitzer der Fahrzeuge im Einkaufszentrum verweilen."

E_5: „Unter 50 Ladevorgängen erfolgen mehr als neun aber weniger als 18 in der Zeit, in der die Besitzer der Fahrzeuge nicht im Einkaufszentrum verweilen."

E_6: „Unter 100 auf dem Parkplatz parkenden Pkw sind mehr E-Autos als nach der Studie zu erwarten wären." **(6BE)**

Zu E_4: Binomialverteilung mit der Formel

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$n = 11;\ k = 9;$$

$$P(E_4) = \binom{11}{9} \cdot 0{,}80^9 \cdot 0{,}20^2 \approx 0{,}29528$$

Zu E_5: Bearbeitung mit Hilfe des Tafelwerks

$$P(E_5) = \sum_{i=10}^{17} B(50; 0{,}2; i) \approx 0{,}99374 - 0{,}44374 = 0{,}55$$

Zu E_6: Bearbeitung mit Hilfe des Tafelwerks

$$P(E_6) = \sum_{i=6}^{100} B(100; 0{,}05; i) = 1 - 0{,}61600 = 0{,}38400$$

$n = 50; p = 0,30;$		
k	$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;k)$
...	...	...
8	0,11692	0,30733
9	0,13641	0,44374
10	0,13982	0,58356
11	0,12711	0,71067
12	0,10328	0,81394
13	0,07547	0,88941
14	0,04986	0,93928
15	0,02992	0,96920
16	0,01636	0,98556
17	0,00818	0,99374
18	0,00375	0,99749
19	0,00158	0,99907
20	0,00061	0,99968
21	0,00022	0,99990
...	...	...

$n = 100; p = 0,05;$		
k	$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;k)$
0	0,00592	0,00592
1	0,03116	0,03708
2	0,08118	0,11826
3	0,13958	0,25784
4	0,17814	0,43598
5	0,18002	0,61600
6	0,15001	0,76601
7	0,10603	0,87204
...	...	...
16	0,00003	0,99999
17	0,00001	1,00000
18		
19		
...	...	...

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel - Stochastik II **LÖSUNG**

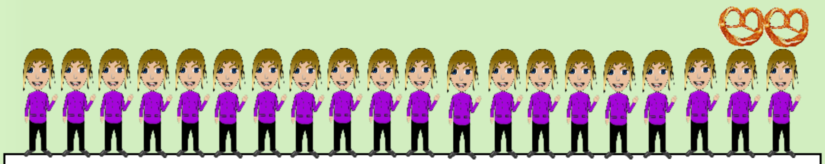
Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Am Pausenverkauf einer großen Mädchenschule kaufen an einem Tag erfahrungsgemäß 30% aller Schülerinnen eine Breze. Es werden 20 Schülerinnen an einem bestimmten Tag zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele von diesen am betrachteten Tag eine Breze kaufen.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_1: „Nur die letzten beiden Schülerinnen kaufen eine Breze,“
E_2: „Genau zehn der Schülerinnen kaufen eine Breze.“ **(3BE)**

$n = 20$; $p_B = 0{,}30$; X=“Anzahl an Schülerinnen, die eine Breze kaufen.“;

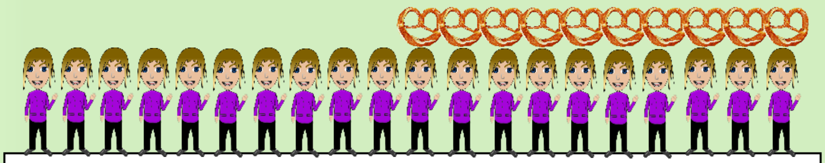
$P(E_1) = 0{,}70^{18} \cdot 0{,}30^2 \approx 0{,}0015$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

$p_{\bar{B}} = 0{,}70$ $p_B = 0{,}30$

$P(E_2) = \binom{20}{10} 0{,}30^{10} \cdot 0{,}70^{10} \approx 0{,}03082$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

$p_{\bar{B}} = 0{,}70$ $p_B = 0{,}30$

Zurück zur Aufgabe

1.2 Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang. **(2BE)**

$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}30 = 6$

$E(X)$ =“Beim Pausenverkauf ist zu erwarten, dass 6 der 20 Schülerinnen eine Breze kaufen.“

Zurück zur Aufgabe

1.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. **(4BE)**

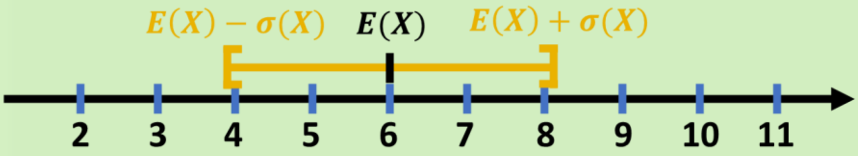
$E(X) = 6$ (vgl. Aufgabe 1.2)

$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 20 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}70 = \frac{21}{5}$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{21}{5}} \approx 2{,}05$

$E(X) - \sigma(x) \approx 3{,}95$

$E(X) + \sigma(X) \approx 8{,}05$



$n = 20; p = 0{,}30;$		
k	$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;k)$
0	0,00080	0,00080
1	0,00684	0,00764
2	0,02785	0,03548
3	0,07160	0,10709
4	0,13042	0,23751
5	0,17886	0,41637
6	0,19164	0,60801
7	0,16426	0,77227
8	0,11440	0,88667
9	0,06537	0,95204
10	0,03082	0,98286

$$
\begin{aligned}
P_{0,3}^{20}(3{,}95 \leq X \leq 8{,}05) &= P_{0,3}^{20}(4 \leq X \leq 8) \\
&= P_{0,3}^{20}(X \leq 8) - P_{0,3}^{20}(X \leq 3) \\
&= \sum_{i=0}^{8} B(20; 0{,}30; i) - \sum_{i=0}^{3} B(20; 0{,}30; i) \\
&\approx 0{,}88667 - 0{,}10709 \\
&= 0{,}77958
\end{aligned}
$$

Zurück zur Aufgabe

1.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:

E_3: „Mehr als doppelt so viele Schülerinnen wie erwartet kaufen eine Breze.“ **(3BE)**

$E(X) = 6$ (vgl. Aufgabe 1.2)

$$
\begin{aligned}
P_{0,3}^{20}(X > 12) &= 1 - P_{0,3}^{20}(X \leq 12) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{12} B(20; 0{,}30; i) \\
&\approx 1 - 0{,}99872 \\
&= 0{,}00128
\end{aligned}
$$

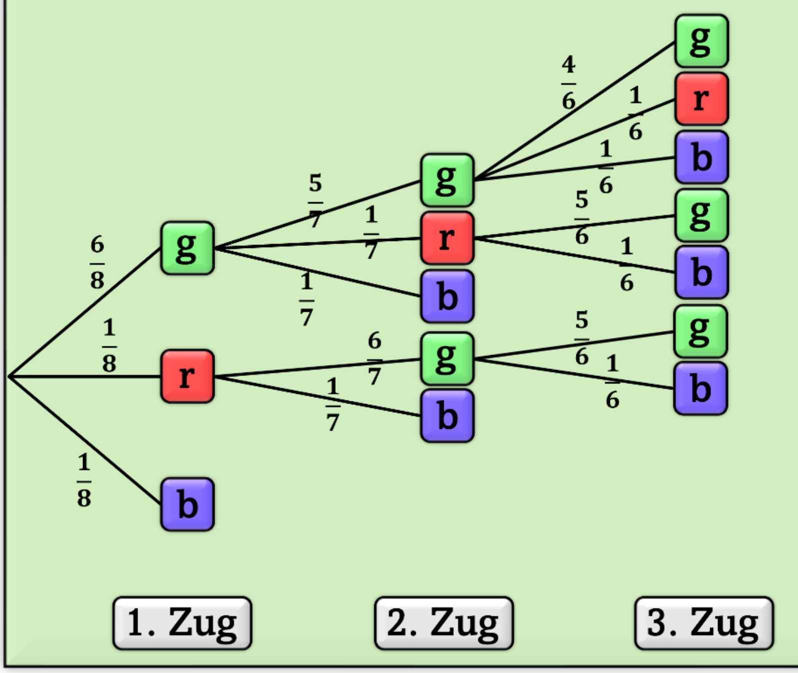
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

$n = 20; p = 0{,}30;$		
k	$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;k)$
0	0,00080	0,00080
1	0,00684	0,00764
2	0,02785	0,03548
3	0,07160	0,10709
4	0,13042	0,23751
5	0,17886	0,41637
6	0,19164	0,60801
7	0,16426	0,77227
8	0,11440	0,88667
9	0,06537	0,95204
10	0,03082	0,98286
11	0,01201	0,99486
12	0,00386	0,99872
13	0,00102	0,99974
14	0,00022	0,99996
15	0,00004	0,99999
16	0,00001	1

Zurück zur Aufgabe

2.0 In einer Urne befinden sich sechs grüne, eine rote und eine blaue Kugel. Ein Zufallsexperiment besteht darin, nacheinander jeweils zufällig eine Kugel ohne Zurücklegen zu ziehen und deren Farbe festzustellen. Es wird so lange gezogen, bis die blaue Kugel erscheint, höchstens jedoch dreimal.

2.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller zehn Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **(5BE)**



ω	$P(\omega)$
ggg	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{14}$
ggr	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{56}$
ggb	$\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{56}$
grg	$\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$
grb	$\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$
gb	$\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$
rgg	$\frac{1}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$
rgb	$\frac{1}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$
rb	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{56}$
b	$\frac{1}{8}$

Zurück zur Aufgabe

2.2 Es werden nun folgende Ereignisse betrachtet:
A: „Es werden alle drei Farben gezogen."
B: „Das Zufallsexperiment endet mit der blauen Kugel.
Berechnen Sie nachvollziehbar die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B.
[Teilergebnis: $P(B) = \frac{3}{8}$] **(3BE)**

$P(A) = P(\{grb, rgb\}) = \frac{1}{56} + \frac{1}{56} = \frac{1}{28}$
$P(B) = P(\{ggb, grb, gb, rgb, rb, b\}) = \frac{5}{56} + \frac{1}{56} + \frac{3}{28} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

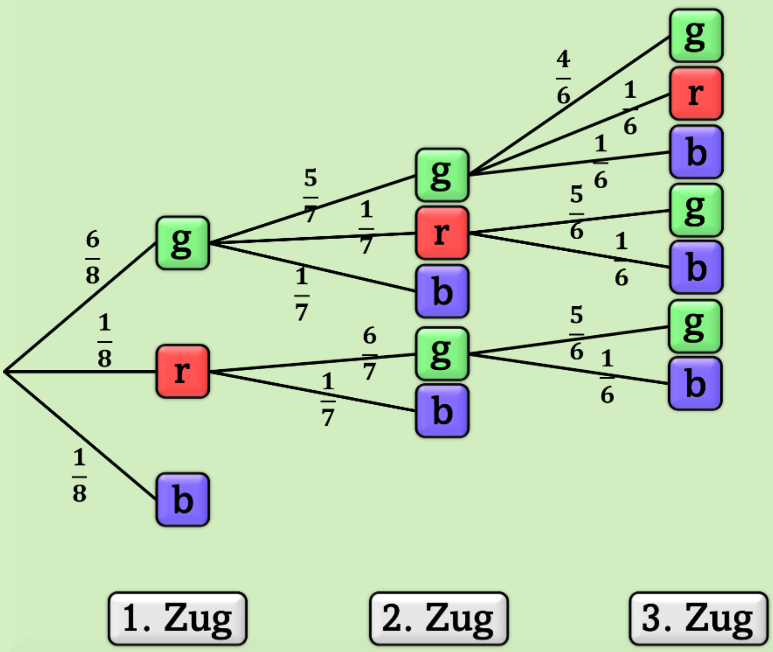
Zurück zur Aufgabe

2.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass insgesamt drei Kugeln gezogen werden unter der Bedingung, dass das Zufallsexperiment mit der blauen Kugel endet. **(3BE)**

C: „Es werden drei Kugeln gezogen."

$P_B(C) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$

$B \cap C =$"Es werden insgesamt 3 Kugeln gezogen und das Zufallsexperiment endet mit der blauen Kugel."
$B \cap C = \{ggb, grb, rgb\}$
$P(B \cap C) = \frac{5}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{56} = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}$



ω	$P(\omega)$
ggg	$\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{14}$
ggr	$\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{56}$
ggb	$\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{56}$
grg	$\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$
grb	$\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$
gb	$\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$
rgg	$\frac{1}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$
rgb	$\frac{1}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$
rb	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{56}$
b	$\frac{1}{8}$

Zurück zur Aufgabe