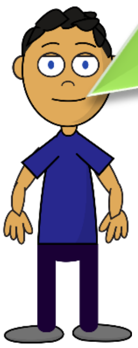
# Lehrwerk:
# Quadratische Funktionen

Autor: Hügel Rudolf

Hügel-Schule

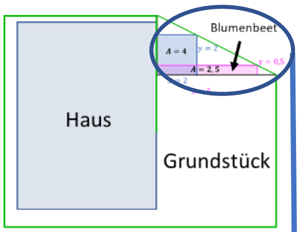
# Inhaltsverzeichnis

# 01 Arbeitsblatt: Quadratische Ergänzung

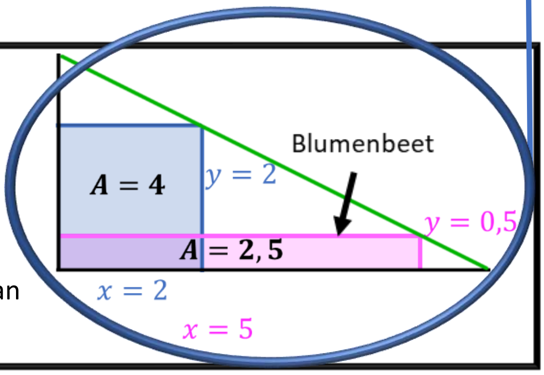


Hallo Freunde,
ich bin ein großer Naturfreund und möchte mir ein neues Gemüsebeet anlegen. Die Fläche dazu liegt am Rand meines Grundstücks und soll rechteckig sein, da ich das Ganze außen herum noch etwas verzieren möchte. Gleichzeitig möchte ich aber möglichst viel anbauen. Die Fläche soll also maximal groß werden. Ich hab euch ein paar Beispiele mitgebracht, wie das ganze aussehen könnte. Ein guter Freund hat mir erzählt, dass er denkt, dass man das Problem mit quadratischer Ergänzung lösen kann. Bitte helft mir doch die Maße für die maximale Fläche zu bestimmen.

Lernvideo




Die Fläche kann durch die Formel $A(x) = -0{,}5x^2 + 3x$ beschrieben werden. Dabei wird durch $x$ die Breite und durch $A$ die Fläche beschrieben.
Beispiel 1: $x = 2$; $\boldsymbol{A(2) = -0{,}5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 4}$;
Beispiel 2: $x = 5$; $\boldsymbol{A(5) = -0{,}5 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 = 2{,}5}$;
Um den $x$-Wert für die maximale Fläche $A_{max}$ zu finden, muss man den zugehörigen Term quadratisch Ergänzen.




**Aufgabe 1**

a) Informiere dich über das Thema „quadratische Ergänzung“ indem du dir das Lernvideo (QR-Code rechts oben) oder das Infomaterial (anspruchsvoll) ansiehst.

b) Bestimme den $x$-Wert für den die maximale Fläche $A_{max}$ zu finden ist.

Schritt 1: Klammere den Leitkoeffizienten aus.

Hilfe

Schritt 2: Zerlege den Koeffizienten vor $x$ so, dass ein Produkt mit dem Faktor 2 entsteht. („Rechne 2 Mal Koeffizient durch 2“)

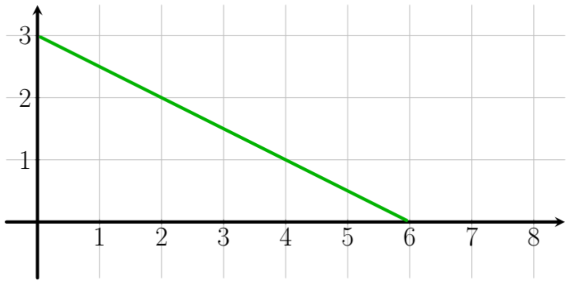
Schritt 3: Führe die quadratische Ergänzung durch.

# 01 Arbeitsblatt: Quadratische Ergänzung

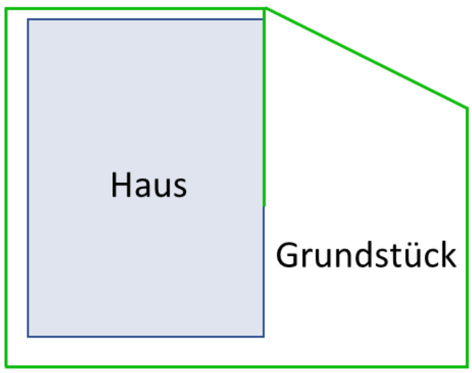
Zusammenfassen: Wende eine binomische Formel an und fasse anschließend zusammen.

Entscheide, für welchen Wert von x der Term einen Extremwert erhält und gibt diesen Wert an. Gib begründet an, ob es sich um einen Maximalwert oder einen Minimalwert handelt.

Zeichne die korrekte Fläche in das Bild, um Karl Friedrich eine entsprechende Lösung zu präsentieren.




Aufgabe 2 Überlege dir bessere Orte, als den von Carl Friedrich gewählten, für flächeninhaltsgleiche Beete.



# 01 Infomaterial: Quadratische Ergänzung

Bei der quadratischen Ergänzung geht es darum, einen quadratischen Term so umzuwandeln, dass man seinen höchsten oder geringsten Wert bestimmen kann.
Beispiel: $T(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 1$
Setzt man bei diesem Term für $x$ bestimmte Werte ein, dann erhält man davon abhängig entsprechende $y$-Werte.
Für $x = -2$ erhält man beispielsweise $T(-2) = -0{,}25 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 = -4$.
Für $x = 1$ erhält man $T(1) = -0{,}25 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2{,}75$.
Für $x = 10$ erhält man $T(8) = -0{,}25 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 1 = 1$.

Um nun bestimmen zu können für welche $x$-Wert der Termwert maximal wird, also für welchen $x$-Wert der größte $y$-Wert entsteht, kann man wie folgt vorgehen.
Schritt 1: Klammere den Leitkoeffizienten aus.
$T(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 1$
$T(x) = -0{,}25(x^2 - 8x - 4)$
(Hinweis: Klammert man einen Wert aus, dann kann man den entsprechenden Summanden durch diesen Wert teilen. Z.B. $2x: (-0{,}25) = -8x$ und deswegen ergibt das Ausklammern von $-0{,}25$ an dieser Stelle $-8x$. Multipliziert man wieder aus, dann erkennt man, dass wieder das Ursprüngliche herauskommt.)

Schritt 2: Zerlege den Koeffizienten vor $x$ so, dass ein Produkt mit dem Faktor 2 entsteht. („Rechne 2 Mal Koeffizient durch 2“)
$T(x) = -0{,}25(x^2 - 8x - 4)$
$T(x) = -0{,}25(x^2 - 2 \cdot 4x - 4)$
(Hinweis: Das macht man, da man später eine der binomischen Formeln – $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ – anwenden möchte)

Schritt 3: Führe die quadratische Ergänzung durch.
(Hinweis: Mit der quadratischen Ergänzung ist nun gemeint, dass man diesen Ausdruck noch dazu addiert, der nötig ist, um die Komponenten einer der binomischen Formeln zu erhalten. Da man einen Ausdruck nicht einfach ohne weiteres dazu addieren kann, muss ihn anschließend auch wieder abziehen.
$T(x) = -0{,}25(x^2 - 2 \cdot 4x - 4)$
$T(x) = -0{,}25(x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2 - 4)$ (Anwenden der binomischen Formel)
$T(x) = -0{,}25((x-4)^2 - 4^2 - 4)$
$T(x) = -0{,}25((x-4)^2 - 20)$

Zusammenfassen: Fasse zusammen und finde den Maximalwert.
(Hinweis: Nun kann die äußere Klammer noch aufgelöst werden)
$T(x) = -0{,}25((x-4)^2 - 20)$
$T(x) = -0{,}25(x-4)^2 + 5$
Da der Ausdruck $(x-4)^2$ immer größer oder gleich 0 ist, ist der Grenzwert – der kleinste Wert, der hier herauskommen kann – die 0. Diesen Wert erhält man für $x = 4$. Deswegen erhält man den Maximalwert für den Term bei $x = 4$. Der Maximalwert ergibt dann eingesetzt genau die additive Konstante. → $T_{max} = T(4) = -0{,}25(4-4)^2 + 5 = 5$.

# 01 Übungen: Quadratische Ergänzung

**Aufgabe 1** Gegeben sind die folgenden quadratischen Terme.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) $2x^2 - 4x + 8$ | (2) $-2x^2 - 8x + 3$ | (3) $x^2 + 3x + 5$ | (4) $0{,}5x^2 - 4x + 2$ |
| (5) $0{,}3x^2 + x + 5$ | (6) $-0{,}25x^2 + 3x$ | (7) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$ | (8) $3x^2 + 12$ |

a) Entscheide jeweils, ob mithilfe von quadratischer Ergänzung ein Maximalwert oder ein Minimalwert bestimmt werden kann.
b) Führe die quadratische Ergänzung durch.
c) Gib den x-Wert an für den der Term maximal/minimal wird und gib den zugehörigen Termwert an.

**Aufgabe 2** Der Veranstalter eines Festivals möchte mithilfe des Eintritts maximale Einnahmen machen. Verlangt er zu wenig Eintritt besteht die Gefahr, dass er zu wenig Gewinn macht und er durch die hohen Kosten des Festivals Verluste macht. Bei zu hohen Eintrittspreisen besteht jedoch die gleiche Gefahr, da das Festival dann zu wenige Besucher haben könnte.
Der Term $T(x) = -10x^2 + 2000x$ ($\mathbb{D} = [0; 200]$) soll ihm dabei helfen. $x$ beschreibt den Eintrittspreis in Euro und $T(x)$ gibt den entsprechenden Gewinn in Euro an.
Bestimme den maximalen Gewinn in Euro, der erzielt werden kann.

**Aufgabe 3** Gegeben sind die folgenden quadratischen Terme.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) $0{,}2x^2 - x + 1$ | (2) $-\frac{1}{8}x^2 - 0{,}5x$ | (3) $x^2 + 0{,}4x + \frac{1}{25}$ | (4) $0{,}5x^2 - 0{,}1x + \frac{1}{3}$ |
| (5) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{10}x - 2$ | (6) $-0{,}125x^2 + 8x$ | (7) $\frac{1}{2}x^2 - 12$ | (8) $7x^2 + 2x$ |

a) Entscheide jeweils, ob mithilfe von quadratischer Ergänzung ein Maximalwert oder ein Minimalwert bestimmt werden kann.
b) Führe die quadratische Ergänzung durch.
c) Gib den x-Wert an für den der Term maximal/minimal wird und gib den zugehörigen Termwert an.

**Aufgabe 4** Gegeben ist die allgemeine Parabelgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
a) Entscheide für welche Werte von $a$ ein Maximalwert bzw. ein Minimalwert bestimmt werden kann.
b) Führe die quadratische Ergänzung durch.

Im Folgenden soll $a = 2$ gelten.
c) Entscheide für welchen Wert von $b$ ein Minimalwert bei $x = 3$ entsteht.



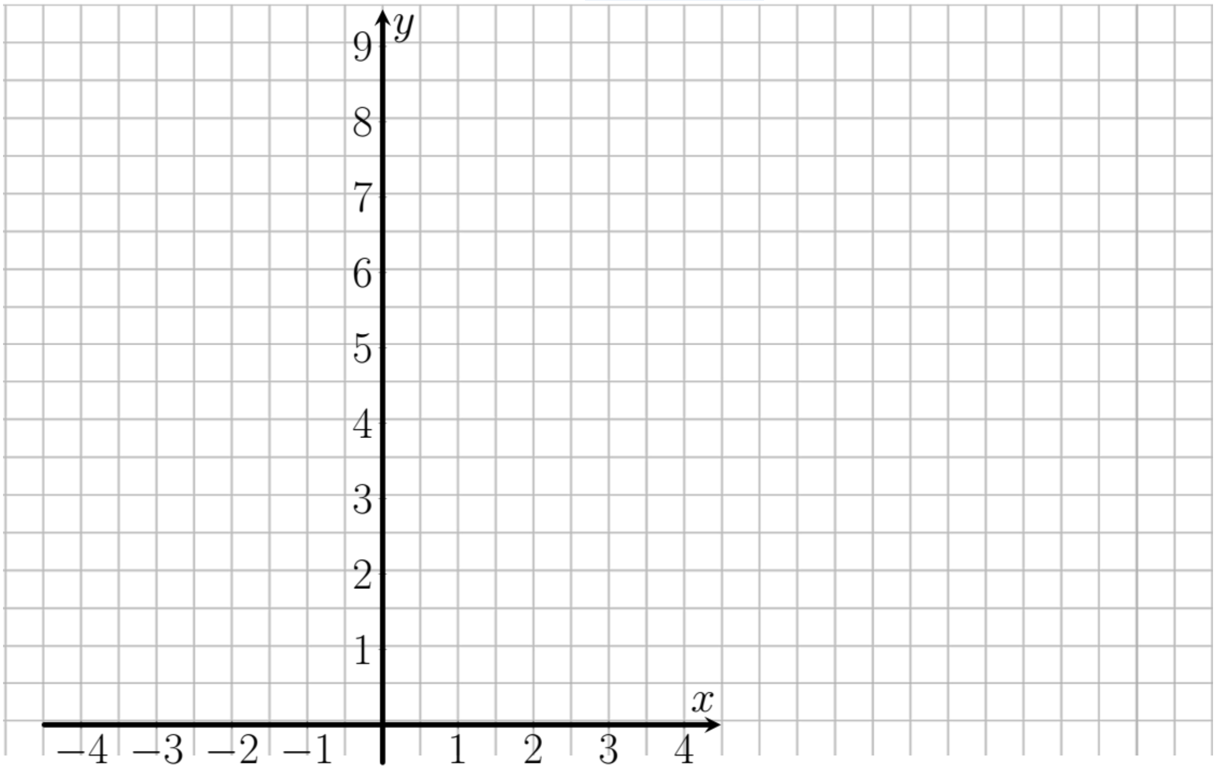
Klicke hier oder verwende den QR-Code, um deine Ergebnisse zu überprüfen.

# 02 Arbeitsblatt: Einführung quadratischer Funktionen

**Aufgabe 1**

a) Erstelle mit deinem Taschenrechner die Wertetabelle einer auf ihrem maximalem Definitionsbereich definierten Funktion $f_1$ mit $f_1(x) = x^2$. Wähle als Startwert $x = -3$ und als Endwert $x = 3$ mit einer Schrittweite von 1. Der Graph $G_{f_1}$ dieser Funktion wird als Normalparabel bezeichnet.

b) Zeichne in folgendes Koordinatensystem die Normalparabel ein.




c) Erstelle nun Wertetabellen für die auf ihrem maximalen Definitionsbereich definierten Funktionen $f_2$ und $f_3$ mit $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$ und $f_3(x) = -2x^2 - 5x + 2$ und zeichne die Graphen $G_{f_2}$ und $G_{f_3}$ der Funktionen $f_2$ und $f_3$ in obiges Koordinatensystem.

**Merke:** Eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktion $f$ hat im allgemeinen die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ (allgemeine Parabelform; $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R}$).
Der Wert $a$ ist der sogenannte Leitkoeffizient. Mit $|a|$ wird die Öffnungsweite bezeichnet. Der Graph der Funktion $f$ wird als Parabel bezeichnet.

**Aufgabe 2** Um die folgende Aufgabe lösen zu können, ist es hilfreich sich eine bestimmte Vorstellung von Parabeln vor Augen zu halten. Stellt man sich vor, dass eine Parabel den Querschnitt eines Gefäßes beschreibt, dann gilt:
Graphen in dessen zugehöriges Gefäß man von oben Wasser rein schütten kann, beschreiben eine nach oben geöffnet Parabel. Umgedrehte Gefäße beschreiben eine nach unten geöffnete Parabel. Vergleiche dazu auch Bild 1 und Bild 2.
Stelle mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) den Graphen der Funktion $f$ mit $f(x) = a \cdot x^2$ dar. Betrachte die Parabeln für verschiedene Werte von $a$ und vervollständige die Tabelle.

| ($< 0$ oder $> 0$) | **(oben/unten)** |
|---|---|
| Für a ___________ | ist die Parabel nach ____________________ geöffnet. |
| Für a ___________ | ist die Parabel nach ____________________ geöffnet. |

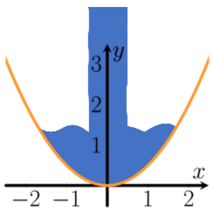



*Bild 1: Nach oben geöffnete Parabel. Von oben strömt Wasser rein.*

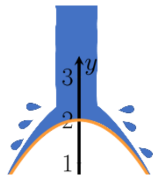



*Bild 2: Nach unten geöffnete Parabel. Das Wasser oben prallt ab.*

Hügel-Schule
BY HÜGEL RUDOLF

# 02 Übungen: Einführung quadratischer Funktionen

**Aufgabe 1** Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 8$ | $f_2(x) = -2x^2 - 8x + 3$ | $f_3(x) = x^2 + 3x + 14$ |
| $f_4(x) = 0{,}3x^2 + x + 5$ | $f_5(x) = -0{,}25x^2 + 3x$ | $f_6(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$ |

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) und b).

a) Ordne die Koeffizienten den Variablen $a$, $b$ und $c$ aus dem allgemeinen Funktionsterm $ax^2 + bx + c$ zu.

b) Zeichne den Graphen der Funktion mithilfe einer Wertetabelle in ein Koordinatensystem.

Merke: Bei der allgemeinen Form (auch allgemeine Parabelform genannt) einer quadratischen Funkt $f$ mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ wird $|a|$ die Öffnungsweite genannt.

**Aufgabe 2** Stelle mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) den Graphen der Funktion $f$ mit $f(x) = a \cdot x^2$ und den Graphen der Funktion $g$ mit $g(x) = x^2$ (Normalparabel) dar.

Vergleiche die verschiedenen Graphen für verschiedene Werte von der Öffnungsweite $a$ mit der Normalparabel. Vervollständige dann die folgende Tabelle.

| | Die Parabel ist nach **oben/unten** geöffnet | Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel **gestaucht/gestreckt** |
|---|---|---|
| Für $a < -1$ | | |
| Für $-1 < a < 0$ | | |
| Für $0 < a < 1$ | | |
| Für $a > 1$ | | |

**Aufgabe 3** Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = x^2 - 2{,}5x + 5$ | $f_2(x) = -0{,}2x^2 + 4x - 1$ | $f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x$ |
| $f_4(x) = 0{,}25x^2 + \frac{1}{8}x - 2$ | $f_5(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ | $f_6(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x - 2$ |

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) – c).

a) Entscheide jeweils, ob der Graph der Funktion eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel beschreibt.

b) Gib an, ob der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel gestreckt oder gestaucht ist.

c) Zeichne die Graphen der Funktionen jeweils in ein eigenes Koordinatensystem. Überprüfe deine Ergebnisse, indem du die Graphen mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) plotten lässt.

**Aufgabe 4** Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = -x^2 + 3$ | $f_2(x) = -0{,}75x^2$ | $f_3(x) = x^2 + 1$ |
| $f_4(x) = 0{,}25x^2 - 1$ | $f_5(x) = 2x^2 - x$ | $f_6(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}$ |

a) Berechne jeweils die zugehörigen y-Werte zu den $x$-Werten $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, und $x_3 = 4$.
b) Bestimme die Nullstelle(n) der Funktion rechnerisch.
c) Zeichne die Graphen mit Hilfe eines Funktionsplotters und überprüfe deine Ergebnisse aus Aufgabe 4a) und 4b). (Hinweis zu b: Die Nullstellen einer Funktion finden sich als die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit der x-Achse wieder.)

**Aufgabe 5** Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 2x^2 - x + 1$ | $f_2(x) = -x^2 - 2x + 3$ | $f_3(x) = x^2 + 1{,}5x + 1$ |
| $f_4(x) = 0{,}2x^2 + x$ | $f_5(x) = -0{,}75x^2$ | $f_6(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$ |

a) Ermittle jeweils durch Rechnung, ob die Punkte $A(1|2)$, $B(0|1)$, $C(2|-3)$ und $D(-1|-1)$ auf, oberhalb oder unterhalb des jeweiligen Graphen liegen. (Tipp: Setze den $x$-Wert jeweils in die Funktionsgleichung ein und vergleiche.)
b) Zeichne die Graphen der Funktionen jeweils mit Hilfe eines Funktionsplotters. Überprüfe anschließend deine Ergebnisse aus Aufgabe a).
c) Erstelle eine Aufgabe mit folgenden Kriterien:
  - Gegeben ist die auf ihrem maximalem Definitionsbereich gegebene Funktion $f$ mit einer von dir gewählten Funktionsgleichung.
  - Gib drei Punkte an, von denen einer auf, einer oberhalb und einer unterhalb des Graphen von $f$ liegt.
  - In der Aufgabenstellung ist zu entscheiden, ob der jeweilige Punkt auf, oberhalb oder unterhalb des Graphen liegt.

**Aufgabe 6** Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = x^2 - 4$.

a) Berechne $f(-1)$, $f(1)$ und $f(3)$.
b) Bestimme die Schnittpunkte vom Graphen $G_f$ von $f$ mit den Koordinatenachsen. (Hilfe: Ansätze zu Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen hier)
c) Erläutere für welchen x-Wert der kleinste Funktionswert entsteht. Entscheide, ob es auch einen größten Funktionswert gibt, den $f$ annehmen kann.



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um deine Ergebnisse zu überprüfen.

# 03 Arbeitsblatt: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Hallo! Wir vom Unternehmen „NatureSize“ sind gerade dabei eine App zu entwickeln, mit der die Größe verschiedener Objekte automatisch abgeschätzt werden kann. Deine Mathelehrkraft hat mir erzählt, dass du uns dabei helfen kannst einen Kriterienkatalog zu erstellen. Es soll dabei zunächst einmal darum gehen parabelförmige Strukturen abzuschätzen. Bitte hilf uns mit folgenden Bildern dabei.

Bild 1 (Schwierigkeit: mittel)

Bild 2 (Schwierigkeit: schwer)

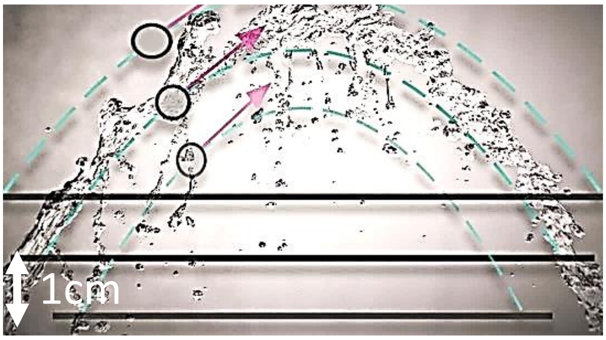



Bild3 (Schwierigkeit: leicht)

a) Wähle mit deinem Banknachbarn eines der Bilder aus.

Die betrachteten Strukturen auf den Bildern nennt man Parabeln.

b) Schätzt die tatsächliche maximale Höhe der parabelförmigen Struktur in eurem ausgewähltem Bild ab. Versucht dafür Informationen aus den Bildern zu verwenden, die euch weiterhelfen könnten. (**Hinweis:** Bei Bild 2 geht es um den Brückenbogen unten. Verwendet bei Bild 3 die mittlere Parabel.) Abschätzung:

Referenzgröße:

c) Parabeln beschreiben die Graphen von quadratischen Funktionen. Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion $f$ lautet $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Für die zugehörigen Funktionsgleichungen der Bilder gilt:
Bild 1: $f_1(x) = -0{,}4x^2 + 3{,}8x$ ($x, y$ in cm)
Bild 2: $f_2(x) = -0{,}14x^2 + 3{,}2$ ($x, y$ in 10 Metern)
Bild 3: $f_3(x) = -0{,}19x^2 + 2{,}47x - 2{,}28$ ($x, y$ in cm)

# 03 Arbeitsblatt: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Mithilfe der Funktionsgleichungen können nun die tatsächlichen maximalen Höhen der parabelförmigen Strukturen bestimmt werden. Betrachte entweder das Infomaterial (mittleres Niveau) oder das Lernvideo (leicht). Bestimme anschließend die maximale Höhe rechnerisch und analysiere dann, ob deine Abschätzungen gelungen sind. Zeichne dazu auch den Graphen der ausgewählten Funktion mithilfe einer Wertetabelle. Gib dem Unternehmen anschließend eine Rückmeldung über die Eignung deiner ausgewählten Referenzgröße als Schätzhilfe.

# 03 Informationsblatt: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Mit Hilfe der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion kann der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel ganz einfach bestimmt werden. Um von der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion $f$ mit $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$, auf die Scheitelpunktform zu kommen, gibt es zwei gängige Wege. Beispiel: $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$

## Der kurze Weg

Die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_s)$ der zugehörigen Parabel können durch die folgenden Formeln einfach berechnet werden.

$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a} \text{ und } y_s = f(x_s)}$

Um $x_s$ zu erhalten müssen wir also lediglich die entsprechenden Werte aus der allgemeinen Form einsetzen. Beispiel: $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3 \rightarrow b = 3{,}6$ und $a = -0{,}6$

$\rightarrow x_s = -\frac{3{,}6}{2\cdot(-0{,}6)} = 3$

$y_s$ erhält man dann, indem man $x_s = 3$ in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzt:

$\rightarrow y_s = -0{,}6 \cdot 3^2 + 3{,}6 \cdot 3 - 3 = 2{,}4 \rightarrow S(3|2{,}4)$

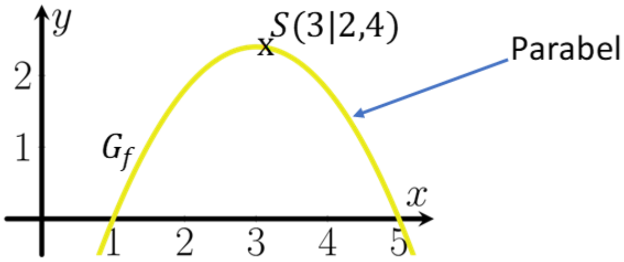
Damit kann die Scheitelpunktform dann ganz einfach angegeben werden.

$\boxed{\text{Scheitelpunktform: } f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s}$

$\rightarrow f(x) = -0{,}6(x-3)^2 + 2{,}4$

## Der lange Weg

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f$ mit $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$. Der Graph dieser Funktion ist im Folgenden abgebildet.




Neben der allgemeinen Form, kann eine quadratische Funktion auch in der sogenannten Scheitelpunktform dargestellt werden. Das funktioniert mithilfe der quadratischen Ergänzung. Im vorliegenden Beispiel sieht das folgendermaßen aus:

| | |
|---|---|
| $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$ | |
| $f(x) = -0{,}6(x^2 + 6x + 5)$ | (ausklammern) |
| $f(x) = -0{,}6(x^2 - 2 \cdot 3x + 5)$ | |
| $f(x) = -0{,}6(x^2 - 2 \cdot 3x + +3^2 - 3^2 + 5)$ | (zu einer binomischen Formel umformen) |
| $f(x) = -0{,}6((x-3)^2 - 3^2 + 5)$ | (eine binomische Formel anwenden) |
| $f(x) = -0{,}6((x-3)^2 - 4)$ | (vereinfachen) |
| $f(x) = -0{,}6((x-\mathbf{3})^2 + \mathbf{2{,}4})$ | |

*Hier wird die quadratische Ergänzung nochmal erklärt.*

Mithilfe der Scheitelpunktform können die Koordinaten des sogenannten **Scheitelpunktes** einer Parabel abgelesen werden. Allgemein kann man eine quadratische Funktion in der Scheitelpunktform folgendermaßen darstellen: $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

$x_s$ beschreibt dabei die x-Koordinate des zugehörigen Scheitelpunktes.

$y_s$ beschreibt dabei die y-Koordinate des zugehörigen Scheitelpunktes.

$a$ entspricht dem $a$ aus der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$

# 03 Übungen: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

**Aufgabe 1** Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 8$ | $f_2(x) = -2x^2 - 8x + 3$ | $f_3(x) = x^2 + 3x + 14$ |
| $f_4(x) = 0{,}3x^2 + x + 5$ | $f_5(x) = -0{,}25x^2 + 3x$ | $f_6(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$ |

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) – b).

c) Bestimme durch möglichst einfache Rechenschritte die Scheitelpunktform der Funktion. Gib den Scheitelpunkt des zugehörigen Graphen der Funktion an.

d) Zeichne den Graphen der Funktionen mithilfe einer Wertetabelle in ein Koordinatensystem.

**Aufgabe 2** Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$. Bestimme jeweils die Scheitelpunktform der Funktion.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = x^2 - 2{,}5x + 5$ | $f_2(x) = -0{,}2x^2 + 4x - 1$ | $f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x$ |
| $f_4(x) = 0{,}25x^2 + \frac{1}{8}x - 2$ | $f_5(x) = \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ | $f_6(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x - 2$ |

**Aufgabe 3** Die Golden Gate Bridge ist eine Hängebrücke und ein Wahrzeichen San Franciscos. Sie wurde 1937 fertiggestellt und war zu diesem Zeitpunkt die längste Hängebrücke der Welt. Der komplette Brückenzug ist dabei 2737 Meter lang.

Im Querschnitt beschreibt das durchhängende Seil in der Mitte der Brücke näherungsweise eine Parabel. Die zugehörige quadratische Funktion $f$ kann durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{280}{819200}x^2 + 20$ mit $\mathbb{D}_f = [-640; 640]$ beschrieben werden, wobei $x$ und $y$ in Metern angegeben werden. Dabei wird die $x$-Achse des Koordinatensystems auf Höhe der Straße gelegt.

a) Gib an, wo in der Zeichnung die $y$-Achse liegen muss. Begründe deine Entscheidung.

b) Die beiden höchsten Punkte der Brücke werden an den Brückenpfeilern erreicht. Die Straße befindet sich 67 Meter oberhalb des Meeresspiegels. Bestimme die Höhe oberhalb der Meeresspiegels, an den höchsten Punkten der Brücke.

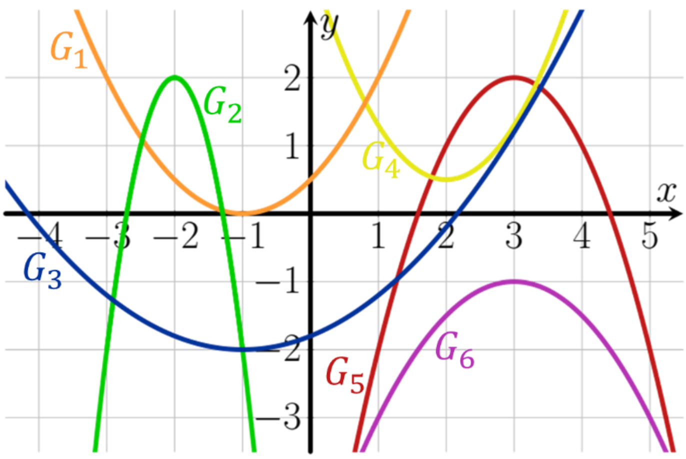
c) Bestimme, wie weit das Seil am niedrigsten Punkt oberhalb der Straße hängt.

# 03 Übungen: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

**Aufgabe 4** Gegeben sind die folgenden Graphen $G_1$ bis $G_6$ quadratischer Funktionen.

a) Gib jeweils den Scheitelpunkt der Parabel und deren Öffnung an.

b) Gib jeweils die Wertemenge der zugehörigen quadratischen Funktion an. Hilfe gibt es hier:




**Aufgabe 5** Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = 2(x-3)^2$ | $f_2(x) = -0{,}5(x+2)^2 + 2$ | $f_3(x) = \frac{1}{27}x^2 - \frac{1}{3}$ |
| $f_4(x) = 0{,}1(x-2)^2 - 1{,}6$ | $f_5(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{7}$ | $f_6(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 1$ |

Bearbeite für jede Funktion die Aufgaben a) – d).

a) Gib den Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel und deren Öffnung an.

b) Gib an, wie viele Nullstellen die Funktion hat. Begründe deine Entscheidung. Berechne anschließend die Nullstellen der Funktion, falls diese existieren.

c) Zeichne den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem. Markiere die Nullstellen der zugehörigen Funktion, indem du die entsprechende(n) Stelle(n) auf der x-Achse einkreist.

d) Gib die Wertemenge der Funktion an. Hilfe dazu gibt es hier:

**Aufgabe 6** Stelle die Funktion $h$ in einer DGS mit $h(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ dar. (Hinweis: Die Variablen $x_s$ und $y_s$ müssen eventuell zunächst definiert werden, bevor die Funktionsgleichung dargestellt werden kann.)

a) Untersuche, wie sich der Graph von $h$ in Abhängigkeit verschiedener Werte von $x_s$ und $y_s$ im Koordinatensystem verschiebt. Erstelle Merksätze dazu. Die folgenden Lückentexte können dir dabei helfen.

- Eine Veränderung von $x_s$ um den Wert $+1$ sorgt für eine Verschiebung des Graphen in ______________ um eine Längeneinheit nach ________.
- Eine Veränderung von $x_s$ um den Wert $-1$ sorgt für eine Verschiebung des Graphen in ______________ um eine Längeneinheit nach ________.

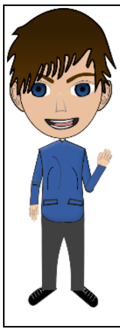
b) Untersuche für welche Werte von $a$ und $y_s$ die Funktion $h$ **keine**, **genau eine** oder **genau zwei** Nullstellen besitzt.



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um deine Ergebnisse zu überprüfen.

# 04 AB: Spiegelung, Streckung, Stauchung und Verschiebung von Parabeln

Yussuf möchte seiner kleinen Schwester Samira in Mathematik helfen und ihr erklären, wie sich Parabeln durch bestimmte Veänderungen von Werten in der Funktionsgleichung im Koordinatensystem verhalten. Als Beispiel betrachten die beiden die auf ihrem maximalen Definitionsbereich definierten Funktionen $g$ und $h$ mit $g(x) = x^2$ und $h(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$. Beide versuchen zu erklären, wie der Graph von $h$ aus dem Graphen von $g$ hervorgeht. Teilt euch in Gruppen von jeweils zwei Personen auf und wählt dann eine der beiden Aufgabengruppen. Entscheidet begründet, ob die von euch gewählte Person recht hat und verbessert eventuelle Fehler. Bearbeitet zunächst das Aufgabenblatt, um euch die Fähigkeiten zum Lösen der Aufgabe anzueignen.



Aufgabengruppe 1

„Der Graph von $h$ geht aus dem Graphen von $g$ hervor durch Spiegelung an der $x$-Achse, Stauchung um $\frac{1}{2}$ in y-Achsenrichtung, Verschiebung um $+1$ LE in $x$-Achsenrichtung und um $-3$ LE in $y$-Achsenrichtung."

Aufgabengruppe 2

„Der Graph von $h$ geht aus dem Graphen von $g$ hervor durch Streckung um $\frac{1}{2}$ in $x$-Achsenrichtung, Verschiebung um $-1$ LE in $x$-Achsenrichtung und um $+3$ LE in $y$-Achsenrichtung und Spiegelung an der x-Achse."

LE="Längeneinheiten"

**Aufgabe** Erstellt zunächst mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware den Graphen der Funktion $g$ mit $g(x) = x^2$ (Normalparabel).

Hinweis

a) Erstellt den Parameter $d$ und dann den Graphen der Funktion $f_1$ mit $f_1(x) = (x-d)^2$. Analysiert, wie sich der Graph von $f_1$ in Abhängigkeit von $d$ verhält und vervollständigt folgenden Satz:
Der Graph von $f_1$ geht durch den Graphen von $g$ hervor durch **Verschiebung** um den Wert ____ LE in ________________.

b) Erstellt den Parameter $e$ und dann den Graphen der Funktion $f_2$ mit $f_2(x) = x^2 + e$. Analysiert, wie sich der Graph von $f_2$ in Abhängigkeit von $e$ verhält und vervollständigt folgenden Satz:
Der Graph von $f_2$ geht durch den Graphen von $g$ hervor durch **Verschiebung** um den Wert ____ LE in ________________.

c) Erstellt den Parameter $a$ (Schrittweite 0,5) und dann den Graphen der Funktion $f_3$ mit $f_3(x) = ax^2$.
Analysiert, wie sich der Graph von $f_3$ in Abhängigkeit von $a$ verhält. Erstellt Punkte $A$ und $B$, die auf dem Graphen von $g$ bzw. $f_3$ liegen und die $x$-Koordinate $x = 1$ haben. Vervollständigt folgenden Satz: Der Graph von $f_3$ geht durch den Graphen von $g$ hervor,

für $|a| > 1$, durch **Streckung** um den Wert ____ LE in ________________.

für $0 < |a| < 1$, durch **Stauchung** um den Wert ____ LE in ________________.

für $a < 0$ zusätzlich durch **Spiegelung** an der ________________.

**Hilfestellung:** Falls ihr an einer Stelle Probleme habt, dann seht euch das Lernvideo an.

Entscheidet nun unter fachlich begründeten Aspekten, ob Yussuf bzw. Samira eine korrekte Aussage getätigt haben. Verfasst gegebenenfalls einen korrekten Satz, wie der Graph der Funktion $h$ aus dem Graphen der Funktion $g$ hervor geht.

# 04 Übungen: Spiegelung, Streckung, Stauchung und Verschiebung von Parabeln

**Aufgabe 1** Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen $f_1$ bis $f_6$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_1(x) = x^2 + 1$ | $f_2(x) = 2x^2$ | $f_3(x) = (x-3)^2$ | $f_4(x) = (x+2)^2$ |
| $f_5(x) = \frac{1}{2}x^2$ | $f_6(x) = -0{,}25x^2$ | $f_7(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$ | $f_8(x) = (x-1)^2 + 2$ |

Gib an, wie der Graph der jeweiligen Funktion aus der Normalparabel hervorgeht. (Hinweis: Die Normalparabel hat die zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = x^2$.)

**Aufgabe 2** Gib jeweils die zugehörige Funktionsgleichung an.

a) Der Graph der Funktion $f$ geht aus der Normalparabel hervor, durch Verschiebung um $+1LE$ in $x$-Achsenrichtung.
b) Der Graph der Funktion $f$ geht aus der Normalparabel hervor, durch Verschiebung um $-2{,}5LE$ in $y$-Achsenrichtung.
c) Der Graph der Funktion $f$ geht aus der Normalparabel hervor, durch Streckung um den Faktor 2 in $y$-Achsenrichtung und Verschiebung um $-1{,}5LE$ in $x$-Achsenrichtung.
d) Der Graph der Funktion $f$ geht aus der Normalparabel hervor, durch Stauchung um den Faktor $\frac{1}{3}$ in $y$-Achsenrichtung und Verschiebung um $2{,}5LE$ in $y$-Achsenrichtung.
e) Der Graph der Funktion $f$ geht aus der Normalparabel hervor, durch Spiegelung an der $x$-Achse, Streckung um den Faktor 1,5 in $y$-Achsenrichtung und Verschiebung um $-1LE$ in $x$-Achsenrichtung.
f) Der Graph der Funktion $f$ geht aus der Normalparabel hervor, durch Spiegelung an der $x$-Achse, Stauchung um den Faktor $0{,}3$ in $y$-Achsenrichtung, Verschiebung um $1{,}8LE$ in $x$-Achsenrichtung und Verschiebung um $-1LE$ in $y$-Achsenrichtung.

**Aufgabe 3** Gegeben sind die folgenden auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen quadratischen Funktionen $g_1$ bis $g_8$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g_1(x) = (x-1)^2 + 1$ | $g_2(x) = 2x^2 + 1$ | $g_3(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2$ | $g_4(x) = x^2 + 2$ |
| $g_5(x) = \frac{1}{4}x^2$ | $g_6(x) = 0{,}25(x+1)^2$ | $g_7(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$ | $g_8(x) = -x^2 + 2$ |

a) Gib an, wie der Graph der jeweiligen Funktion aus der Normalparabel hervorgeht. (Hinweis: Die Normalparabel hat die zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = x^2$.)
b) Gib an, wie die Graphen der Funktionen $g_1$ bis $g_4$ aus dem Graphen der Funktion $g$ mit $g(x) = 2(x-1)^2 + 2$ hervor gehen.

**Aufgabe 4** Gib die zugehörige Funktionsgleichung an. Der Graph der Funktion $f$ geht aus dem Graphen der Funktion $h$ mit $h(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ hervor, durch

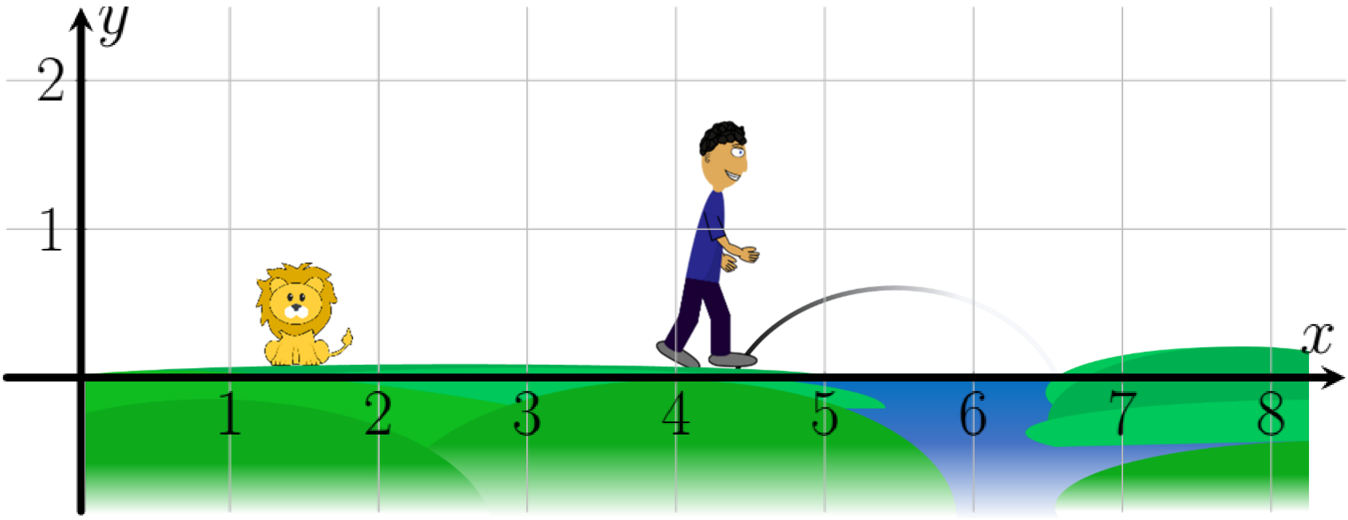
a) Verschiebung um $+2$LE in $x$-Achsenrichtung.
b) Verschiebung um $-1$LE in $y$-Achsenrichtung.
c) Spiegelung an der $x$-Achse.
d) Überprüfe 4a)-c) indem du $h$ und $f$ von einer dynamischen Geometriesoftware zeichnen lässt.



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um die Aufgaben 1-2 zu überprüfen.

# 05 Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel) Teil 1

Oh nein! Wir beobachten, wie Carl Friedrich von einem Löwen verfolgt wird. Vor ihm sieht er einen Flussübergang. Zum Glück ist der Löwe noch recht klein, so dass er nicht so weit wie Carl springen kann. Carl setzt also an und will springen. Wenn Carl im Fluss landet, dann wird er vielleicht abgetrieben und geht uns verloren. Entscheide mithilfe der untenstehenden Informationen oder des Lernvideos, ob Carl springen soll und formuliere einen Satz, den du ihm zurufen möchtest. Gib ihm auch eine mathematische Begründung, um ihn zu überzeugen.




Das andere Flussufer liegt von der Absprungstelle genau 1,95 Meter entfernt. Die Flugbahn von Carl Friedrich kann durch den Graphen der Funktion $f$ mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x - 14{,}625$ ($x$ und $y$ in Metern) beschrieben werden, wobei durch die Nullstellen der Funktion der Absprungs- und Landeort identifiziert werden kann.

Beschreibe kurz Carl Friedrichs Problem.

Gib den geplanten Weg an, mit dem wir uns Fähigkeiten aneignen wollen, um das Problem zu lösen.

Gib das Ziel an, das wir erreichen wollen.

# 05 Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel) Teil 1

20 Min

a) Lies dir zunächst das Infoblatt zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen durch.
b) Gib den Ansatz zur Bestimmung der Nullstellen der gegebenen Funktion an.
(Hinweis: Du findest den Funktionsterm unter der Zeichnung auf der ersten Seite)

c) Bestimme jetzt die Nullstellen der Funktion.

*Probleme? Sieh dir nochmal das Beispiel bei* 2 *an.*

Vergleiche deine Ergebnisse mit deinem Banknachbarn. Schreibt auf, was ihr Carl zurufen würdet. Gebt Carl dabei auch eine mathematisch saubere Begründung an, um ihn zu überzeugen.

Schon fertig?

Herausforderung 1: Der Lebensraum von Löwen

Informiere dich online über den Lebensraum von Löwen. Gib an, wie viele Löwen es weltweit noch gibt und in welchen Ländern die häufigsten Vorkommen sind.
(Hinweis: Die Seite des WWF könnte dabei helfen.)

Herausforderung 2: Eine bedrohte Tierart

Löwen sind eine bedrohte Tierart. Informiere dich online über Gegenmaßnahmen, die getroffen werden, um diese Tiere zu schützen.

# 05 Informationsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

10 Min

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R}$) können nicht durch so einfache Umformungen, wie bei linearen Gleichungen, nach $x$ aufgelöst werden. Von daher hat es sich angeboten obige Gleichung allgemein nach $x$ aufzulösen und das Endergebnis als Formel anzugeben. Diese dabei entstande Formel lautet die „Lösungsformel für quadratische Gleichungen“:

1

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Die $x$-Werte, die dabei bestimmt werden, sind genau die Lösungen, die eingesetzt in der gegebenen Gleichung für eine wahre Aussage sorgen. Die Gleichung wird mithilfe der quadratischen Ergänzung gelöst. Die Herleitung der Formel kannst du dir auf der Rückseite des Informationsblattes anschauen.

2

Beispielanwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

*Falls du Verständnisprobleme hast, sieh dir das Lernvideo Teil 1 an.*

Die Platzhalter $a$, $b$ und $c$ stehen für Zahlen, die in einer konkreten Aufgabenstellung eingesetzt werden können. Wir schauen uns als Beispiel die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ an, die wir lösen möchten.

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

Hier identifizieren wir die Werte

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$

Das $\pm$ bei der Formel drückt aus, dass es zwei Lösungen für die Gleichung gibt. Man schreibt einmal den Bruch nur mit dem „–“ (Minuszeichen) und berechnet den Endwert und macht das Gleiche dann mit „+“ eingesetzt:

$x_1 = \frac{-6-10}{4} = -4;$ $\qquad x_2 = \frac{-6+10}{4} = 1;$

Macht man nun die Probe und setzt jeweils $-4$ oder $1$ in die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ ein, dann erkennt man, dass genau diese Werte eine Lösung der Gleichung sind.
Im allgemeinen wird der Ausdruck unter der Wurzel die sogenannte Diskriminante $D$ genannt. Man schreibt die Lösungsformel für quadratische Gleichungen deswegen auch folgendermaßen auf:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Der Grund für diese Art der Darstellung liegt darin, dass Abhängig von dem Wert unter der Wurzel ersichtlich wird, ob die betrachtete Gleichung zwei Lösungen, eine oder keine Lösung besitzt. Das wird hier jedoch noch nicht behandelt. Dazu gibt es ein Extraarbeitsblatt.

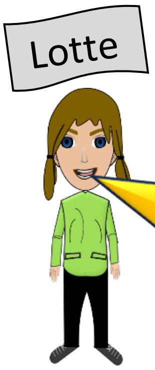
Schon fertig?
Sieh dir die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen noch an.

# Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Links ist das Lösen eines konkreten Beispiels. Auf der rechten Seite ist die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0 = 2x^2 + 6x - 8$ | | $0 = ax^2 + bx + c$ | |
| **1. Ausklammern** | | | |
| $0 = 2(x^2 + 3x - 4)$ | | $0 = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ | |
| **2. Zerlege den Koeffizienten von $x$, um den $2ab$-Teil einer binomischen Formel zu erzeugen.** | | | |
| $0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1{,}5x - 4)$ | | $0 = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a})$ | |
| **3. Führe die quadratische Ergänzung durch.** | | | |
| $0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1{,}5x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 4)$ | | $0 = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a})$ | |
| $0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 - 4)$ | | $0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$ | |
| $0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 6{,}25)$ | | $0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ | |
| **Nun hat man den Term so umgeformt, dass in der kompletten Gleichung nur noch ein $x$ steht und kann nach diesem auflösen.** | | | |
| $0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 6{,}25)$ | $\|:2$ | $0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4a^2}\right)$ | $\|:a$ |
| $0 = (x + 1{,}5)^2 - 6{,}25$ | $\|+1{,}562$ | $0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4a^2}$ | $\|+\frac{b^2+4ac}{4a^2}$ |
| $6{,}25 = (x + 1{,}5)^2$ | $\sqrt{}$ | $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ | $\sqrt{}$ |
| $\pm 2{,}5 = x + 1{,}5$ | $\|-0{,}75$ | $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a}$ | $\|+\frac{b}{2a}$ |
| $x_{1,2} = -1{,}5 \pm 2{,}5$ | | $x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ | |
| Die Formel kann man nun noch umformen, da $\sqrt{4a^2} = 2a$ gilt | | $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | |

# 05 Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel) Teil 2




**Hallo Leute,**
**oh je... Das ist mir unangenehm. Es geht um Mathe. Meine Mathelehrerin hat uns heute als Hausaufgabe aufgegeben, die Nullstellen von drei Funktionen zu bestimmen. Irgendwie kapier ich das aber wohl nicht. Ich glaube ich habe nur eine Aufgabe gelöst. Da kommt 1,5 und -2 raus. Der Rest war komisch. Bei einer der Funktionen habe ich nicht Mal eine Lösung rausgebracht. Könnt ihr mir bitte helfen?**

**Lotte! Wir helfen dir 😊 !**
Hier ein kleiner Hefteintrag dazu.

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen können gegebene Gleichungen der Form $0 = ax^2 + bx + c$ (mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$) gelöst werden.

Die Formel lautet .

Im Folgenden sollen die Nullstellen quadratischer Funktionen mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmt werden. Dazu sind die Funktionsgleichungen der auf ganz $\mathbb{R}$ gegebenen Funktionen $f_1$, $f_2$ und $f_3$ gegeben.

$f_1(x) = 4x^2 + 2x - 12$
$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$
$f_3(x) = 2x^2 + 3x + 4$

*Falls du Probleme hast, sieh dir das Lernvideo Teil 2 an.*

a) Bestimme die Nullstellen der Funktion $f_1$.

b) Bestimme die Nullstellen der Funktion $f_2$.



Bitte wenden 😊

# 05 Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel) Teil 2

c) Bestimme die Nullstellen der Funktion $f_3$.

*Falls du Probleme hast, sieh dir das Lernvideo Teil 2 an.*

Vergleiche deine Ergebnisse mit deinem Banknachbarn. Erstellt dann eine Zusammenfassung für Lotte. Im Folgenden gibt es dafür auch ein paar Hilfestellungen. Füllt den Lückentext aus.

Der Wert unter der Wurzel wird als sogenannte Diskriminante $D$ bezeichnet.

Für die Diskriminante gilt damit: $D = b^2 - 4ac$

Allgemein kann man die Lösungsformel für quadratische Gleichungen also auch schreiben als $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$.

Bei quadratischen Gleichungen kann es, abhängig von der Diskriminante $D$, zwei, eine oder keine Lösungen geben.

Bei Aufgabe a) ist der Wert der Diskrimnante $D =$ ____.

Gilt für die Diskriminante $D > 0$, so hat die zugehörige quadratische Gleichung ____ Lösungen.

Bei Aufgabe b) ist der Wert der Diskrimnante $D =$ ____.

Gilt für die Diskriminante $D = 0$, so hat die zugehörige quadratische Gleichung ____ Lösung.

Bei Aufgabe c) ist der Wert der Diskrimnante $D =$ ____.

Gilt für die Diskriminante $D < 0$, so hat die zugehörige quadratische Gleichung ____ Lösung.

Geht nun auf Lottes Aussage ein und erklärt ihr vor allem, ob sie etwas falsch gemacht hat.

# 05 Übungen: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

**Aufgabe 1** Gegeben sind die folgenden Gleichungen unter der Grundmenge $\mathbb{R}$. Bestimme die Lösungen der Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

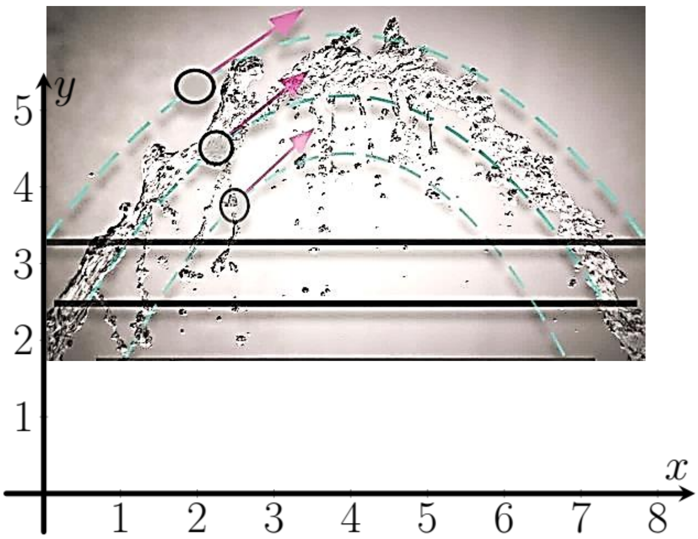
| | | |
|---|---|---|
| a) $0 = 2x^2 - 2x - 12$ | b) $0 = 3x^2 - 9x - 30$ | c) $0 = 3x^2 + 6x - 45$ |
| d) $0 = x^2 + x - 2$ | e) $0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ | f) $0 = x^2 + 4x + 4$ |

**Aufgabe 2** Gegeben sind die folgenden Gleichungen unter der Grundmenge $\mathbb{R}$. Bestimme zunächst den Wert der Diskriminante. Gib die Anzahl der Lösungen der Gleichungen an und bestimme diese gegebenenfalls.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $0 = 2x^2 + 7x - 4$ | b) $0 = 3x^2 + 26x - 9$ | c) $0 = x^2 - 2x + 1$ | d) $0 = 2x^2 + 4x + 3$ |
| e) $2 = x^2 + x$ | f) $2{,}5 = 0{,}7x^2 - 3x$ | g) $0 = \frac{1}{3}x^2 - 3$ | h) $2x^2 = -3x^2 - 1$ |

**Aufgabe 3** Carl Friedrich möchte eine App programmieren, mithilfe derer Funktionsgraphen automatisch über Strukturen in Bildern gelegt werden. Zudem wird eine passende Funktionsgleichung ausgegeben. Im Folgenden wird die Flugkurve eines Wasserstrahls analysiert. Die App gibt die folgende Funktionsgleichung aus.

$f_1(x) = -0{,}24x^2 + 1{,}85x + 0{,}2$




a) Bestimme die Nullstellen der Funktion und gib an, welcher Funktionsgraph am besten zu den Werten passt.

b) Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunkts des Funktionsgraphen.

c) Zeichne den Graphen der Funktion und entscheide, ob die vorgegebene Funktionsgleichung der App den Wasserstrahl gut beschreibt.

*Hilfe zu b):* *Scheitelpunktform quadratischer Funktionen*

**Aufgabe 4** Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_1$ bist $f_{12}$ auf ihrem maximalen Definitionsbereich.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$ | $f_2(x) = x^2 - 4x$ | $f_3(x) = 2x^2 - 8$ |
| $f_4(x) = x^2 + 6x + 9$ | $f_5(x) = 0{,}5(x-1)(x+4)$ | $f_6(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 1$ |
| $f_7(x) = -2x(x+1)$ | $f_8(x) = x^2 + 9x$ | $f_9(x) = 2(x-1)^2 - 8$ |
| $f_{10}(x) = 0{,}5x^2$ | $f_{11}(x) = 4x^2 + 16$ | $f_{12}(x) = x^2 + x + 1$ |

a) Bestimme die Nullstellen der Funktionen möglichst effizient.

b) Gib die Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit den Koordinatenachse an.

*Hilfe zu a):* *Sieh dir das Erklärvideo zu möglichen Lösungswegen an.*

*Hilfe zu b):* *Sieh dir das Erklärvideo zu Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen an.*



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um die Aufgaben zu überprüfen.

# 06 Arbeitsblatt: Nullstellenform quadratischer Funktionen

Die Alsterfontäne in Hamburg kann bei passendem Windgang so fotografiert werden, dass der Strahlenverlauf des Wassers auf dem Bild durch den Graphen einer quadratischen Funktion genähert werden kann. Die Nullstellen der Funktion liegen dabei bei $x_1 = 13$ und $x_2 = 33$. Der Leitkoeffzient beim Funktionsterm beträgt $a = -0{,}4$. Im Folgenden soll abgeschätzt werden, welche maximale Höhe die Fontäne etwa erreicht.

**Aufgabe 1** Suche dir mithilfe anderer Objekte im Bild (z.B. Auto, Baum, Zug, Brücke…), dessen Größe du besser einschätzen kannst, Anhaltspunkte, um anhand dessen die Höhe der Fontäne abzuschätzen.

Anhaltspunkt zum Schätzen:

Geschätzte Höhe der Fontäne:

**Aufgabe 2** Lies dir das Informationsblatt aufmerksam durch.

**Aufgabe 3** Gib zunächst die Nullstellenform der Funktion an und bestimme dann die Höhe der Fontäne. Vergleiche deine Eregbnisse mit deinem Banknachbarn. Entscheidet, wer den besseren Schätzer gewählt hat.

Hilfestellungen:

Nullstellenform
Sieh dir 1 und 2 auf dem Informationsblatt an.

Höhe der Fontäne
Du benötigst den Scheitelpunkt des Funktionsgraphen.
Sieh dir 3 und 4 auf dem Informationsblatt an.

# 06 Informationsblatt: Nullstellenform quadratischer Funktionen

20 Min

Funktionsterme quadratischer Funktionen können im Allgemeinen in drei verschiedenen Formen angegeben werden. Die allgemeine Form, die Scheitelpunktform und die Nullstellenform. Die allgemeine Form und die Scheitelpunktform werden in anderen Kapiteln behandelt. Wir vergleichen im Folgenden jedoch die allgemeine Form mit der Nullstellenform.

1 Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\ b, c \in \mathbb{R})$
Nullstellenform: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\ x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

Die Werte $x_1$ und $x_2$ stehen für die Nullstellen der quadratischen Funktion. Der Wert $a$ ist bei beiden Gleichungen derselbe und wird als Leitkoeffizient $a$ bezeichnet.

Beispiel:
Betrachtet wird die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f$ mit $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$.
Falls die Nullstellen der Funktion nicht gegeben sind, müssen diese erst berechnet werden. In diesem Fall können wir das mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.
$-0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3 = 0$

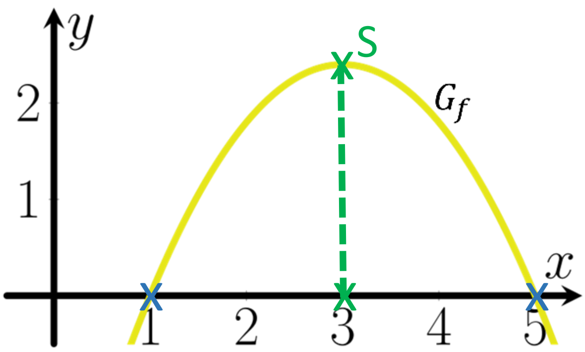
$$x_{1,2} = \frac{-3{,}6 \pm \sqrt{3{,}6^2 - 4 \cdot (-0{,}6) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-0{,}6)} = \frac{-3{,}6 \pm 2{,}4}{-1{,}2}$$

$\rightarrow \quad x_1 = 1; \qquad x_2 = 5;$

Jetzt muss nur noch in die Formel für die Nullstellenform eingesetzt werden.
2 $f(x) = -0{,}6(x - 1)(x - 5)$

Da beiden Formen die gleiche Funktion beschreiben, gehört zu beiden Formen auch derselbe Funktionsgraph $G_f$.

Falls du Verständnisprobleme hast, sieh dir noch das Lernvideo an.




Die Nullstellen finden wir an den Schnittpunkten der Parabel mit der x-Achse wieder. Auf Grund des Symmetrieverhaltens von Parabeln befindet sich der x-Wert des Scheitelpunktes $x_s$ genau zwischen den Schnittpunkten mit der x-Achse.
3 $x_s = \frac{1+5}{2} = 3$
Den y-Wert $y_s$ kann man dann einfach ausrechnen indem man in eine der Funktionsgleichungen einsetzt.
4 $y_s = -0{,}6(3 - 1)(3 - 5) = 2{,}4 \ \rightarrow S(3|2{,}4)$

Schon fertig? Überlege dir, wie man die Nullstellenform in die allgemeine Form umwandeln kann.
Die Lösung gibt's durch den Link oder den QR-Code.

Hügel-Schule BY HÜGEL RUDOLF

# 06 Übungen: Nullstellenform quadratischer Funktionen

**Hilfe zu 1a):** *Sieh dir das Erklärvideo zu möglichen Lösungswegen an.*

**Aufgabe 1** Gegeben sind die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktionen $f_1 - f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = x^2 - x - 6$ | $f_2(x) = 2x^2 + 4x$ | $f_3(x) = (\frac{1}{8}x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{3})$ |
| $f_4(x) = 2x^2 - 32$ | $f_5(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ | $f_6(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 2$ |

a) Bestimme jeweils die Nullstellen der Funktion und gib die Funktionsgleichung in Nullstellenform an, falls möglich.

b) Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1 - f_6$ mithilfe einer DGS (dynamischen Geometriesoftware) und überprüfe damit deine Ergebnisse aus Aufgabe a).

**Hilfe zu 2a):** *Sieh dir das Erklärvideo zu Schnittpunkten mit den Koordinaten-achsen an.*

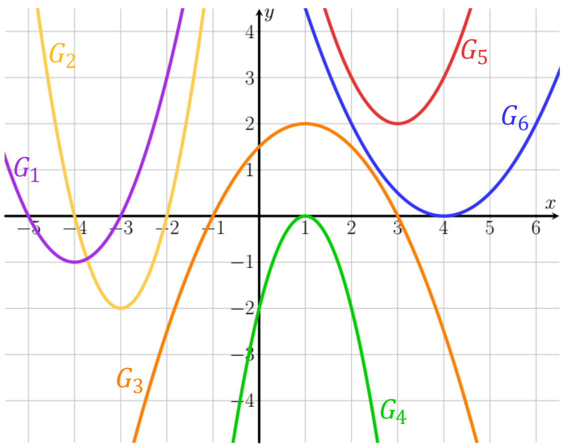
**Aufgabe 2** Gegeben sind die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktionen $f_1 - f_6$.

| | | |
|---|---|---|
| $f_1(x) = (x-4)(x-1)$ | $f_2(x) = 2(x+1)(x+2)$ | $f_3(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x+2)$ |
| $f_4(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$ | $f_5(x) = \frac{1}{2}x(x-2)$ | $f_6(x) = -(2x-4)(x+2)$ |

a) Gib jeweils ohne weitere Rechnung die Schnittpunkte der Graphen von $f_1 - f_6$ mit den Koordinatenachsen an.

b) Zeichne die Graphen von $G_{f_1} - G_{f_6}$ der Funktionen $f_1 - f_6$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwende dabei für jeden Graphen eine eigene Farbe. Überprüfe damit deine Ergebnisse aus a).

**Aufgabe 3** Gegeben sind die Graphen $G_1 - G_6$ der Funktionen $f_1 - f_6$.




**Hilfe zur graphischen Bestimmung des Leitkoeffizienten a.**

a) Gib die Funktionsgleichungen in Nullstellenform an, falls möglich. Lese die Nullstellen dazu so genau wie möglich vom Graphen ab.

b) Gib die Funktionsgleichungen in Scheitelpunktform an.

c) Bestimme mithilfe der Ergebnisse aus a) oder b) die allgemeine Form der Funktionsgleichungen.

**Aufgabe 4** Gegeben sind im Folgenden die Nullstellen von auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_1 - f_6$ mit $a = 1$. Gib jeweils die Nullstellenform an.

| | | |
|---|---|---|
| $x_1 = 1; x_2 = 4;$ | $x_1 = -1; x_2 = -4;$ | $x_1 = 1; x_2 = -4;$ |
| $x_1 = -1; x_2 = 4;$ | $x_1 = 0; x_2 = 4;$ | $x_1 = 0; x_2 = -4;$ |

# 07 quadratische Funktionsgleichungen bestimmen

**Einführung** Mache den Selbstlernkurs zum bestimmen quadratischer Funktionsgleichungen.

**Aufgabe 1** Gegeben sind auf ganz $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktionen. Bestimme jeweils die zugehörige Funktionsgleichung.

| | |
|---|---|
| a) $A(0\|1)$, $B(1\|3)$, $C(3\|13)$ | e) $A(-3\|-2{,}5)$, $B(1\|1{,}5)$, $C(3\|11)$ |
| b) $A(-2\|-2)$, $B(1\|2{,}5)$, $C(2\|6)$ | f) $A(-1\|3)$, $B(1\|13)$, $C(2\|7{,}5)$ |
| c) $A(-1\|3{,}5)$, $B(2\|-1)$, $C(3\|-0{,}5)$ | g) $A(-0{,}5\|4)$, $B(0\|4)$, $C(2\|3)$ |
| d) $A(-3\|-11)$, $B(0\|2{,}5)$, $C(1\|0{,}5)$ | h) $A(-1\|-1{,}2)$, $B(-2\|-2{,}6)$, $C(3\|8{,}4)$ |

**Aufgabe 2** Ein Tennisspieler trainiert mit einer Ballwurfmaschine auf einem 24 Meter langem Tennisfeld. Die Flugbahn des Balles ist dabei parabelförmig. Der Ball wird auf der Grundlinie abgeschossen und hat nach 10 Metern eine Höhe von 1,5 Metern. Nach 15 Metern liegt die Höhe noch bei 1 Meter, während er schließlich 20 Meter von der Abwurfstelle entfernt landet.

a) Bestimme den zugehörigen quadratischen Funktionsterm, wobei $x$ die Weite in Metern und $y$ die aktuelle Höhe beschreiben soll.

b) Auf halber Länge des Tennisfeldes befindet sich das Tennisnetz. Bestimme, in welcher Höhe der Tennisspieler den Ball trifft, wenn er 2 Meter hinter dem Netz steht. Runde auf zwei Nachkommastellen.

**Aufgabe 3** Carla Friedrich übt das Freiwerfen beim Basketball. Bei ihrem Wurf hat der Ball 2 Metern in waagrechter Richtung eine Höhe von 4,52 Metern, nach 3 Metern eine Höhe von 4,77 Metern und nach 4 Metern eine Höhe von 4,28 Metern. Die Flugkurve des Balls kann durch eine Parabel genähert werden.

a) Bestimme die Funktionsgleichung der zugehörigen quadratischen Funktion $f$, bei der die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der waagrechten Wurfweite beschrieben wird.

b) Der Basketballkorb hat waagrecht eine Entfernung von 5 Metern. Der Korb hängt dabei 3,05 Meter hoch. Entscheide mathematisch begründet, ob der Ball den Korb trifft.

**Aufgabe 4** Der Veranstalter einer Festivals möchte mit Hilfe der Eintrittspreise einen maximalen Gewinn erzielen. Den Gewinn $f(x)$ in Abhängigkeit des Eintrittspreises $x$ kann man dabei durch eine quadratische Funktion nähern. Bekannt ist, dass bei einem Preis von 50€ in etwa ein Gewinn von 82500€ zu erwarten ist, während bei einem Preis von 100€ in etwa ein Gewinn von 130000€ erwartet wird. Bestimme den zugehörigen Funktionsterm.
Hinweis: Du kannst dir zusätzlich den erwarteten Gewinn bei einem Preis von 0€ überlegen.

**Aufgabe 5** Gegeben sind auf ganz $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktionen. Bestimme jeweils die zugehörige Funktionsgleichung. Der Punkt $S$ beschreibt den Scheitelpunkt der Parabel.

| | |
|---|---|
| a) $A(0\|1)$, $S(5\|3)$ | b) $A(3\|1)$, $S(4\|8)$ |
| c) $A(-2\|0)$, $B(1\|0)$, $C(2\|2)$ | d) $A(2\|0)$, $B(6\|0)$, $C(1\|4)$ |
| e) $A(2\|0)$, $S(4\|3)$ | f) $A(-3\|0)$, $B(3\|0)$, $C(1\|1)$ |

*Bestimmung über Scheitelpunktform*

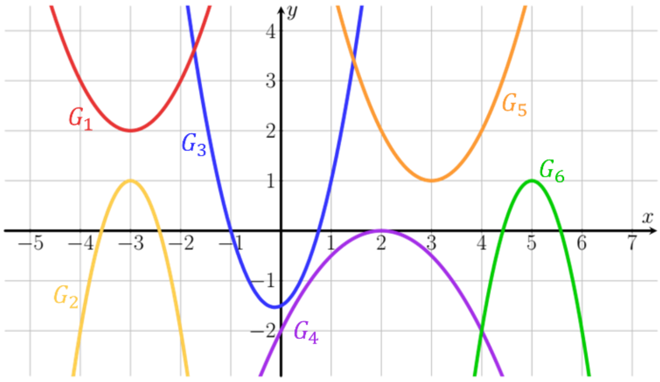
*Bestimmung über Nullstellenform*



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um die Aufgaben zu überprüfen.

# 08 Übungen: quadratische Funktionen mit Parameter

**Aufgabe 1** Gegeben sind Graphen von auf ganz $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktionen. Bestimme die Wertemenge der Funktionen graphisch.




Link: Hilfe zur Bestimmung von Wertemengen

**Aufgabe 2** Gegeben sind auf ganz $\mathbb{R}$ definierte quadratische Funktionen mit folgenden Funktionsgleichungen.

| | |
|---|---|
| $f_1(x) = 2(x-1)^2 + 3$ | $f_4(x) = 0{,}5(x-1)(x+3)$ |
| $f_2(x) = (x+1{,}5)^2 - 1$ | $f_5(x) = -0{,}25(x-3)(x+2)$ |
| $f_3(x) = -0{,}5(x+2)^2 + 1$ | $f_6(x) = -2(x-1)(x+0{,}5)$ |

Link: Hilfe zur Bestimmung von Wertemengen

a) Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1 - f_6$ ohne einen Taschenrechner zu verwenden.
b) Gib die Wertemenge der Funktionen an.
c) Erläutere, wie man nur mithilfe der Scheitelpunktform und ohne zugehörigen Graphen die Wertemenge bei den Funktionen $f_1$, $f_2$ und $f_3$ angeben kann.

**Aufgabe 3** Gegeben ist die Schar der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k$ mit $f_k(x) = kx^2 - 2$ mit $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Verwende eine dynamische Geometriesoftware (DGS), definiere zunächst den Parameter $k$ und lasse anschließend die Funktion $f_k$ zeichnen.
b) Entscheide mithilfe der DGS für welchen Wert von $k$ die Funktion $f_k$ genau die zwei Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ besitzt.
c) Stelle einen rechnerischen Weg dar, um Aufgabe b) zu lösen.
d) Gib den Scheitelpunkt an, den alle Funktionsgraphen unabhängig von $k$ besitzen.
e) Bestimme den Wert für $k$, bei dem der Scheitelpunkt des Graphen von $f_k$ durch den Punkt $P(2|1)$ geht.

**Aufgabe 4** Betrachtet wird die Schar der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Parabeln sind nach oben geöffnet und besitzen die Scheitelpunkte $S(-1|0{,}5k+2)$.

a) Bestimme den Wert für $k$, sodass die Parabel die $x$-Achse berührt.
b) Bestimme den Wert für $k$, sodass die Parabel die $x$-Achse nicht schneidet und nicht berührt.
c) Gib die Funktionsgleichung einer Funktionenschar $f_k$ an, die obige Scheitelpunkte besitzt. Tipp: Verwende die Scheitelpunktform.



Klicke hier oder verwende den QR-Code, um die Aufgaben 1-4 zu überprüfen.

**Aufgabe 5** Gegeben ist die Schar der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k$ mit $f_a(x) = ax^2 - 4a$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Bestimme den Wert des Parameters $a$ so, dass der Punkt $P(1|-6)$ auf dem Graphen von $f_a$ liegt.

b) Bestimme die Nullstellen von $f_a$ und entscheide, ob diese von $a$ abhängig sind.

c) Untersuche, ob der Scheitelpunkt der Graphen von $f_a$ von $a$ abhängig ist.

d) Zeichne die Graphen von $f_a$ für $a = -2$, $a = 0{,}5$ und $a = 1$.

**Aufgabe 6** Gegeben ist die Schar der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k$ mit $f_a(x) = ax^2 - 4x + 2a$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Bestimme den Wert des Parameters $a$ so, dass der Punkt $P(0|2)$ auf dem Graphen von $f_a$ liegt.

b) Bestimme $a$ so, dass $f_a$ eine doppelte Nullstelle besitzt. Gib $f_a$ für diesen Wert von $a$ in Nullstellenform.

c) Untersuche, ob der Scheitelpunkt der Graphen von $f_a$ von $a$ abhängig ist.

d) Bestimme $a$ so, dass der Scheitelpunkt an der Stelle $x = 1$ liegt.

**Aufgabe 7** Gegeben ist die Schar der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k$ mit $f_a(x) = ax^2 - 8ax + 2$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Bestimme $a$ so, dass $f_a$ eine doppelte Nullstelle besitzt. Gib $f_a$ für diesen Wert von $a$ in Nullstellenform.

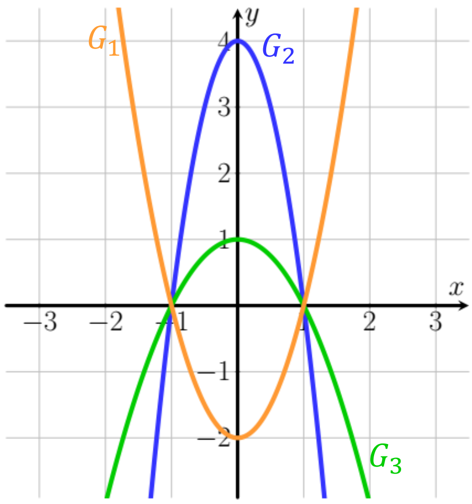
b) Untersuche, ob der Scheitelpunkt der Graphen von $f_a$ von $a$ abhängig ist. Gib die Funktion $f_a$ in Scheitelpunktform an.

c) Bestimme den Wert $a$ so, dass der Scheitelpunkt der Funktion den $y$ −Wert $y = 4$ hat.

**Aufgabe 8** Gegeben sind die folgenden drei Graphen einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Schar von Funktionen $f_k$.

a) Gib die Funktionsgleichungen der Graphen $G_1$, $G_2$ und $G_3$ in Scheitelpunktform und Nullstellenform an.

b) Schließe aus Aufgabe a) auf die Funktionsgleichung der Schar der Funktionen $f_k$ und gib diese in Scheitelpunktform und Nullstellenform an.






Hügel-Schule BY HÜGEL RUDOLF