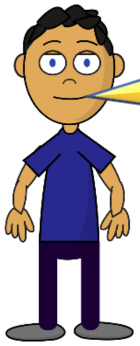
Arbeitsblatt: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen



Hallo! Wir vom Unternehmen „NatureSize“ sind gerade dabei eine App zu entwickeln, mit der die Größe verschiedener Objekte automatisch abgeschätzt werden kann. Deine Mathelehrkraft hat mir erzählt, dass du uns dabei helfen kannst einen Kriterienkatalog zu erstellen. Es soll dabei zunächst einmal darum gehen parabelförmige Strukturen abzuschätzen. Bitte hilf uns mit folgenden Bildern dabei.

Bild 1 (Schwierigkeit: mittel)

Bild 2 (Schwierigkeit: schwer)

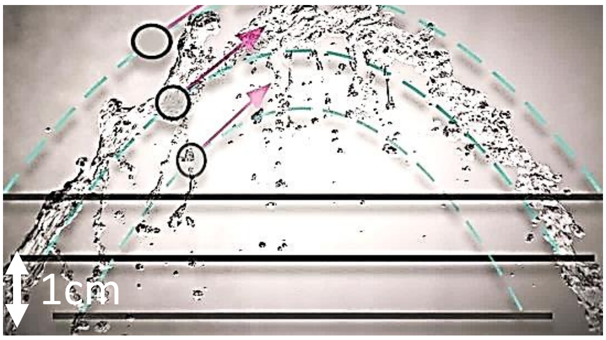


Bild3 (Schwierigkeit: leicht)

a) Wähle mit deinem Banknachbarn eines der Bilder aus.

Die betrachteten Strukturen auf den Bildern nennt man <u>Parabeln</u>.

b) Schätzt die tatsächliche maximale Höhe der parabelförmigen Struktur in eurem ausgewähltem Bild ab. Versucht dafür Informationen aus den Bildern zu verwenden, die euch weiterhelfen könnten. (**Hinweis:** Bei Bild 2 geht es um den Brückenbogen unten. Verwendet bei Bild 3 die mittlere Parabel.) Abschätzung:

Referenzgröße:

c) Parabeln beschreiben die Graphen von quadratischen Funktionen. Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion f lautet $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Für die zugehörigen Funktionsgleichungen der Bilder gilt:
Bild 1: $f_1(x) = -0{,}4x^2 + 3{,}8x$ (x, y in cm)
Bild 2: $f_2(x) = -0{,}14x^2 + 3{,}2$ (x, y in 10 Metern)
Bild 3: $f_3(x) = -0{,}19x^2 + 2{,}47x - 2{,}28$ (x, y in cm)

Hügel-Schule BY HÜGEL RUDOLF

Arbeitsblatt: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Mithilfe der Funktionsgleichungen können nun die tatsächlichen maximalen Höhen der parabelförmigen Strukturen bestimmt werden. Betrachte entweder das Infomaterial (mittleres Niveau) oder das Lernvideo (leicht). Bestimme anschließend die maximale Höhe rechnerisch und analysiere dann, ob deine Abschätzungen gelungen sind. Zeichne dazu auch den Graphen der ausgewählten Funktion mithilfe einer Wertetabelle. Gib dem Unternehmen anschließend eine Rückmeldung über die Eignung deiner ausgewählten Referenzgröße als Schätzhilfe.

Informationsblatt: Scheitelpunktform quadratischer Funktionen

Mit Hilfe der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion kann der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel ganz einfach bestimmt werden. Um von der allgemeinen Form einer quadratischen Funktion f mit $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$, auf die Scheitelpunktform zu kommen, gibt es zwei gängige Wege. Beispiel: $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$

Der kurze Weg

Die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s|y_s)$ der zugehörigen Parabel können durch die folgenden Formeln einfach berechnet werden.

$\boxed{x_s = -\frac{b}{2a} \text{ und } y_s = f(x_s)}$

Um x_s zu erhalten müssen wir also lediglich die entsprechenden Werte aus der allgemeinen Form einsetzen. Beispiel: $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$ → $b = 3{,}6$ und $a = -0{,}6$

→ $x_s = -\frac{3{,}6}{2 \cdot (-0{,}6)} = 3$

y_s erhält man dann, indem man $x_s = 3$ in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzt:

→ $y_s = -0{,}6 \cdot 3^2 + 3{,}6 \cdot 3 - 3 = 2{,}4$ → $S(3|2{,}4)$

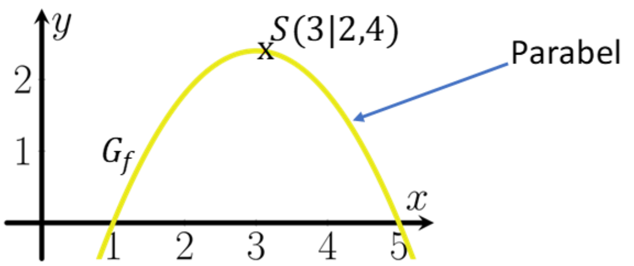
Damit kann die Scheitelpunktform dann ganz einfach angegeben werden.

$\boxed{\text{Scheitelpunktform: } f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s}$

→ $f(x) = -0{,}6(x-3)^2 + 2{,}4$

Der lange Weg

Als Beispiel betrachten wir die Funktion f mit $f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$. Der Graph dieser Funktion ist im Folgenden abgebildet.



Neben der allgemeinen Form, kann eine quadratische Funktion auch in der sogenannten Scheitelpunktform dargestellt werden. Das funktioniert mithilfe der quadratischen Ergänzung. Im vorliegenden Beispiel sieht das folgendermaßen aus:

$f(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}6x - 3$	
$f(x) = -0{,}6(x^2 + 6x + 5)$	(ausklammern)
$f(x) = -0{,}6(x^2 - 2 \cdot 3x + 5)$	
$f(x) = -0{,}6(x^2 - 2 \cdot 3x + +3^2 - 3^2 + 5)$	(zu einer binomischen Formel umformen)
$f(x) = -0{,}6((x-3)^2 - 3^2 + 5)$	(eine binomische Formel anwenden)
$f(x) = -0{,}6((x-3)^2 - 4)$	(vereinfachen)
$f(x) = -0{,}6((x-\mathbf{3})^2 + \mathbf{2{,}4})$	

Hier wird die quadratische Ergänzung nochmal erklärt.

Mithilfe der Scheitelpunktform können die Koordinaten des sogenannten **Scheitelpunktes** einer Parabel abgelesen werden. Allgemein kann man eine quadratische Funktion in der Scheitelpunktform folgendermaßen darstellen: $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

x_s beschreibt dabei die x-Koordinate des zugehörigen Scheitelpunktes.

y_s beschreibt dabei die y-Koordinate des zugehörigen Scheitelpunktes.

a entspricht dem a aus der allgemeinen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$