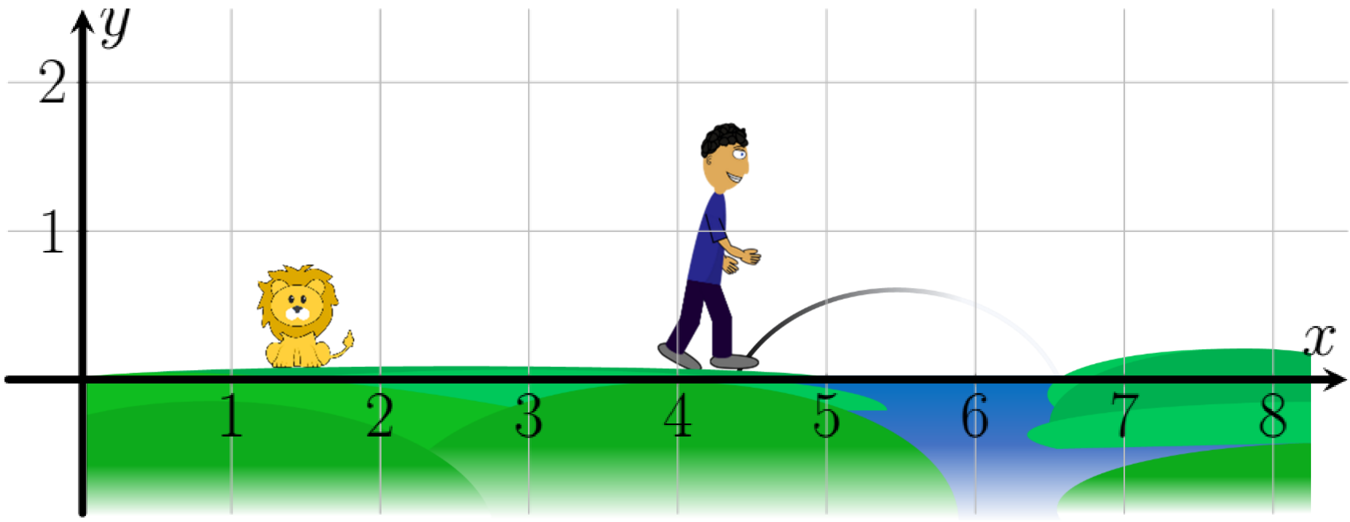
Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel) Teil 1

Oh nein! Wir beobachten, wie Carl Friedrich von einem Löwen verfolgt wird. Vor ihm sieht er einen Flussübergang. Zum Glück ist der Löwe noch recht klein, so dass er nicht so weit wie Carl springen kann. Carl setzt also an und will springen. Wenn Carl im Fluss landet, dann wird er vielleicht abgetrieben und geht uns verloren. Entscheide mithilfe der untenstehenden Informationen oder des Lernvideos, ob Carl springen soll und formuliere einen Satz, den du ihm zurufen möchtest. Gib ihm auch eine mathematische Begründung, um ihn zu überzeugen.



Das andere Flussufer liegt von der Absprungstelle genau 1,95 Meter entfernt. Die Flugbahn von Carl Friedrich kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x - 14{,}625$ (x und y in Metern) beschrieben werden, wobei durch die Nullstellen der Funktion der Absprungs- und Landeort identifiziert werden kann.

Beschreibe kurz Carl Friedrichs Problem.

Gib den geplanten Weg an, mit dem wir uns Fähigkeiten aneignen wollen, um das Problem zu lösen.

Gib das Ziel an, das wir erreichen wollen.

Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel)

20 Min

a) Lies dir zunächst das Infoblatt zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen durch.

b) Gib den Ansatz zur Bestimmung der Nullstellen der gegebenen Funktion an.
(Hinweis: Du findest den Funktionsterm unter der Zeichnung auf der ersten Seite)

c) Bestimme jetzt die Nullstellen der Funktion.

Probleme? Sieh dir nochmal das Beispiel bei 2 an.

d) Vergleiche deine Ergebnisse mit deinem Banknachbarn. Schreibt auf, was ihr Carl zurufen würdet. Gebt Carl dabei auch eine mathematisch saubere Begründung an, um ihn zu überzeugen.

Schon fertig?

Herausforderung 1: Der Lebensraum von Löwen

Informiere dich online über den Lebensraum von Löwen. Gib an, wie viele Löwen es weltweit noch gibt und in welchen Ländern die häufigsten Vorkommen sind.
(Hinweis: Die Seite des WWF könnte dabei helfen.)

Herausforderung 2: Eine bedrohte Tierart

Löwen sind eine bedrohte Tierart. Informiere dich online über Gegenmaßnahmen, die getroffen werden, um diese Tiere zu schützen.

10 Min

Informationsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R}$) können nicht durch so einfache Umformungen, wie bei linearen Gleichungen, nach x aufgelöst werden. Von daher hat es sich angeboten obige Gleichung allgemein nach x aufzulösen und das Endergebnis als Formel anzugeben. Diese dabei entstande Formel lautet die „Lösungsformel für quadratische Gleichungen“:

1

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Die x-Werte, die dabei bestimmt werden, sind genau die Lösungen, die eingesetzt in der gegebenen Gleichung für eine wahre Aussage sorgen. Die Gleichung wird mithilfe der quadratischen Ergänzung gelöst. Die Herleitung der Formel kannst du dir auf der Rückseite des Informationsblattes anschauen.

2

Beispielanwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

Falls du Verständnisprobleme hast, sieh dir das Lernvideo Teil 1 an.

Die Platzhalter a, b und c stehen für Zahlen, die in einer konkreten Aufgabenstellung eingesetzt werden können. Wir schauen uns als Beispiel die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ an, die wir lösen möchten.

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

Hier identifizieren wir die Werte

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$

Das $\pm$ bei der Formel drückt aus, dass es zwei Lösungen für die Gleichung gibt. Man schreibt einmal den Bruch nur mit dem „–“ (Minuszeichen) und berechnet den Endwert und macht das Gleiche dann mit „+“ eingesetzt:

$x_1 = \frac{-6-10}{4} = -4;$ $\quad x_2 = \frac{-6+10}{4} = 1;$

Macht man nun die Probe und setzt jeweils -4 oder 1 in die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ ein, dann erkennt man, dass genau diese Werte eine Lösung der Gleichung sind.

Im allgemeinen wird der Ausdruck unter der Wurzel die sogenannte Diskriminante D genannt. Man schreibt die Lösungsformel für quadratische Gleichungen deswegen auch folgendermaßen auf:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Der Grund für diese Art der Darstellung liegt darin, dass Abhängig von dem Wert unter der Wurzel ersichtlich wird, ob die betrachtete Gleichung zwei Lösungen, eine oder keine Lösung besitzt. Das wird hier jedoch noch nicht behandelt. Dazu gibt es ein Extraarbeitsblatt.

Schon fertig?

Sieh dir die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen noch an.

Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Links ist das Lösen eines konkreten Beispiels. Auf der rechten Seite ist die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$0 = 2x^2 + 6x - 8$	$0 = ax^2 + bx + c$

1. Ausklammern

$0 = 2(x^2 + 3x - 4)$	$0 = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

2. Zerlege den Koeffizienten von x, um den $2ab$-Teil einer binomischen Formel zu erzeugen.

$0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1{,}5x - 4)$	$0 = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a})$

3. Führe die quadratische Ergänzung durch.

$0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1{,}5x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 4)$	$0 = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a})$
$0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 - 4)$	$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$
$0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 6{,}25)$	$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

Nun hat man den Term so umgeformt, dass in der kompletten Gleichung nur noch ein x steht und kann nach diesem auflösen.

$0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 6{,}25)$	$\mid :2$	$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4a^2}\right)$	$\mid :a$
$0 = (x + 1{,}5)^2 - 6{,}25$	$\mid +1{,}562$	$0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4a^2}$	$\mid + \frac{b^2+4ac}{4a^2}$
$6{,}25 = (x + 1{,}5)^2$	$\sqrt{}$	$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$\sqrt{}$
$\pm 2{,}5 = x + 1{,}5$	$\mid -0{,}75$	$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a}$	$\mid + \frac{b}{2a}$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm 2{,}5$		$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	

Die Formel kann man nun noch umformen, da $\sqrt{4a^2} = 2a$ gilt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$