Inhaltsverzeichnis

TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Analysis

1. Gegeben ist die lineare Funktion $g: x \mapsto 3x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

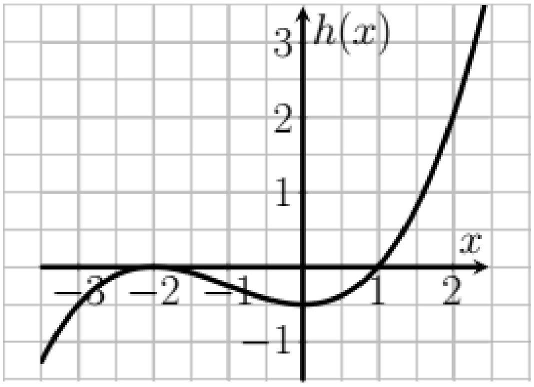
1.1. Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem. **(2BE)**

Lösung S.13 | Lösungsvideo

1.2. Berechnen Sie $\int_0^2 g(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrische bezüglich G_g. **(3BE)**

Lösung S.13 | Lösungsvideo

2. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Entscheiden Sie anhand des Graphen G_h , ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Die Nullstellen und die Extremstellen von h sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden. **(3BE)**

a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in]-2; 1[$
b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.
c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$

Lösung S.14 | Lösungsvideo

3. Eine nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(2|2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörige quadratische Funktion $p_k: x \mapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Bestimmen Sie alle Werte für k, sodass die Parabel die x-Achse genau zweimal schneidet. **(2BE)**

Lösung S.15 | Lösungsvideo

4. Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $D_f = [1; \infty[$.
Bestimmen Sie die Wertemenge von f. **(4BE)**

Lösung S.16 Lösungsvideo

5. Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen. **(6BE)**

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$
b) $(e^x - 2)^2 - 4 = 0$

Lösung S.17 Lösungsvideo

6. Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch $B: t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei steht die Variable t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $B(t)$ für die Bakterienzahl in einer Petrischale.
Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung $0{,}4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$ führt, und lösen Sie die Gleichung nach t_1 auf. **(2BE)**

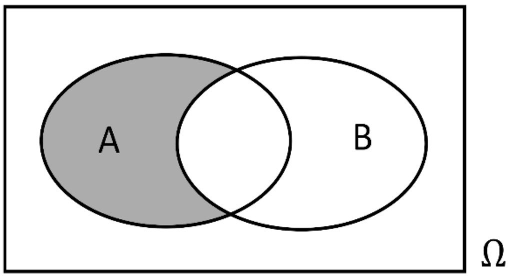
Lösung S.18 Lösungsvideo

$\sum 22$

TEIL 1: ohne Hilfsmittel — Stochastik

1. A und B sind vereinbare Ereignisse des Ergebnisraums Ω. **(3BE)**

a) Geben Sie das im nebenstehenden Venn-Diagramm grau markierte Ereignis E_1 möglichst einfach als Verknüpfung der Ereignisse A und B an.



Lösung S.19 Lösungsvideo

b) Veranschaulichen Sie das Ergebnis $E_2 = A \cup \overline{B}$ in einem Venn-Diagramm.

Lösung S.19 Lösungsvideo

2. Ein Handballspieler trainiert Siebenmeter-Weitwurf, wobei der Torhüter seines Vereins im Tor steht.
Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe ins Tor.

2.1 Der Spieler führt zwei Siebenmeter-Würfe aus.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: **(3BE)**

E_3: „Der Spieler trifft jedes Mal."
E_4: „Der Spieler trifft mindestens einmal."

Lösung S.20 Lösungsvideo

2.2 Formulieren Sie zwei Ereignisse E_5 und E_6 im Sachzusammenhang, deren Wahrscheinlichkeiten sich wie folgt berechnen lassen: **(2BE)**

$$P(E_5) = 0{,}8^{20}$$

$$P(E_6) = \binom{50}{30} \cdot 0{,}8^{30} \cdot 0{,}2^{20}$$

Lösung S.20 Lösungsvideo

3. Einer Gruppe von fünf Jugendlichen werden zwei Freikarten für ein Rockkonzert zur Verfügung gestellt. Um diese zu verteilen, werden nacheinander Lose gezogen, ohne diese zurückzulegen. Jeder Jugendliche zieht dabei genau einmal. Neben den zwei Gewinnlosen für die Freikarten befinden sich drei Nieten in der Lostrommel.

Entscheiden Sie unter Zuhilfenahme einer geeigneten Rechnung, ob der Zweite, der zieht, die gleiche Chance auf eine Freikarte hat wie der Erste. **(4BE)**

Lösung S.21 Lösungsvideo

$\sum 12$

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f an. **(9BE)** Lösung S.22 Lösungsvideo

1.2. Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von G_f handelt oder nicht. **(6BE)** Lösung S.24 Lösungsvideo

1.3. Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = -2$ ist. **(2BE)** Lösung S.25 Lösungsvideo

1.4. Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1cm$ **(4BE)** Lösung S.25 Lösungsvideo

2. Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u.a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$ mit $t, N_0, c \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $N_0 > 0$, $c > 0$ darstellen. Der Funktionswert von N gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die seit Ende des Jahres 2008 ($t_0 = 0$) vergangene Zeit in Jahren. Ende des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60.

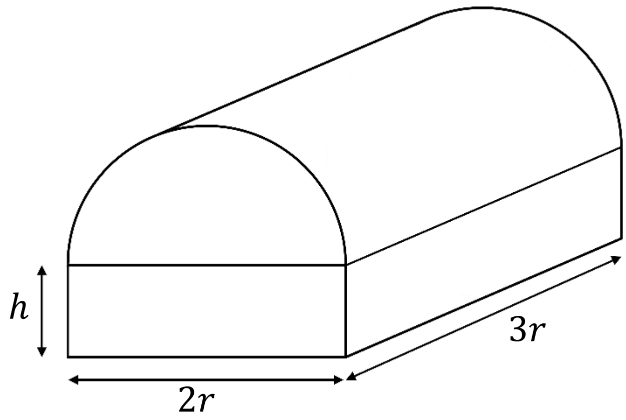
2.1. Bestimmen Sie die Werte der Parameter N_0 und c der Funktion N. Runden Sie N_0 ganzzahlig und c auf drei Nachkommastellen. **(4BE)** Lösung S.26 Lösungsvideo

2.2. Im Folgenden gilt $N(t) = 4 \cdot e^{0{,}301 \cdot t}$.

2.2.1. Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 2.0 voraussichtlich diesen Wert erreicht. **(3BE)** Lösung S.27 Lösungsvideo

2.2.2. Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion N in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ $(b > 0)$ an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie b auf drei Nachkommastellen. **(2BE)** Lösung S.27 Lösungsvideo

3. Ein Tiergarten plant den Bau eines Tropenhauses, in dem ein künstliches Ökosystem mit Lebensbedingungen für tropische Pflanzen- und Tierarten geschaffen werden soll. Das Tropenhaus soll die Form eines Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder bekommen. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet. Der Quader hat die Breite $2r$, die Länge $3r$ und die Höhe h (siehe Skizze).
Um möglichst ideal klimatische Bedingungen zu schaffen, sollen die Außenwände des Tropenhauses und das Dach aus Glas bestehen. Hierfür sind $1000m^2$ Glas vorgesehen.
Die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses in Abhängigkeit von Radius r des Halbzylinders lässt sich durch die Funktionswerte der Funktion $V: r \mapsto V(r)$ beschrieben. Aus den Baurichtlinien geht hervor, dass der Radius r des Halbzylinders maximal $8{,}5m$ betragen darf. Der Tiergartenbetreiber fordert hierfür mindestens $4m$.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



3.1. Stellen Sie eine Gleichung der in 3.0 eingeführten Funktion V auf. Bestimmen Sie dazu vorab die Maßzahl A des Flächeninhalts der insgesamt zu verglasenden Oberfläche des Tropenhauses in Abhängigkeit des Radius des Halbzylinders und der Höhe des Quaders.
[Mögliche Ergebnisse: $A(r,h) = 10rh + 4\pi r^2$ und $V(r) = 600r - 0{,}9\pi r^3$] **(6BE)**

Lösung S.28 Lösungsvideo

3.2. Um den Pflanzen und Tieren möglichst viel Lebensraum zur Verfügung zu stellen, soll das Tropenhaus maximalen Rauminhalt besitzen.
Bestimmen Sie den Radius r so, dass die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses den absolut größten Wert annimmt und geben Sie diesen maximalen Wert an. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **(7BE)**

Lösung S.29 Lösungsvideo

$\sum 43$

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II

1. Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1. Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an. **(3BE)**

Lösung S.30 Lösungsvideo

1.2. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x)$ darstellen lässt. **(3BE)**

Lösung S.30 Lösungsvideo

1.3. Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f . Geben Sie die Wertemenge W_f an. **(11BE)**

Lösung S.31 Lösungsvideo

1.4. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $0 \leq x \leq 24$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. **(5BE)**

Lösung S.33 Lösungsvideo

1.5. Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. **(4BE)**

Lösung S.33 Lösungsvideo

2. Landwirte beklagen zunehmend Ernteausfälle durch anhaltende Dürren in den Sommermonaten. Während der durchschnittliche Ertrag an Weizen pro Hektar Anbaufläche 2014 noch bei 86,3 Dezitonnen lag, brachte die Ernte von 2017 nur noch durchschnittlich 70,0 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche ein.
Basierend auf den seit dem Jahr 2014 ausgewerteten Daten kann die Ertragsentwicklung vereinfacht durch die Funktion $E: t \mapsto 56{,}3 \cdot e^{c \cdot t} + a$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$, $c \in \mathbb{R}^-$ und $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. Der Funktionswert von E gibt den durchschnittlichen Weizenertrag in Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die vergangene Zeit in Jahren ab dem Jahr 2014 ($t_0 = 0$).
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1. Ermitteln Sie den Mittelwert der jährlichen Abnahme des durchschnittlichen Weizenertrags pro Hektar Anbaufläche über die Jahre 2014 bis 2017. **(3BE)**

Lösung S.34 Lösungsvideo

2.2. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und c der Funktion E. Runden Sie c auf zwei Nachkommastellen. **(4BE)** Lösung S.34 Lösungsvideo

2.3. Im Folgenden gilt: $E(t) = 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t} + 30$

2.3.1. Einige Landwirte sind der Meinung, dass der Weizenanbau ab einem durchschnittlichen Weizenertrag von 50 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche nicht mehr rentabel für sie ist. Berechnen Sie, ab welchem Jahr dies laut dem Modell der Fall wäre. **(3BE)**

Lösung S.35 Lösungsvideo

2.3.2. Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von E für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. **(3BE)**

Lösung S.35 Lösungsvideo

2.3.3. Sofern Landwirte 2018 mit einem massiven Einbruch ihrer Weizenerträge konfrontiert waren, hatten sie Anspruch auf Unterstützungszahlungen des Bundes. War ihr durchschnittlicher Weizenertrag pro Hektar Anbaufläche um mehr als 30% geringer als der Mittelwert der entsprechenden Erträge in den Jahren 2015, 2016 und 2017, so konnten sie einen Antrag auf Nothilfen stellen.
Prüfen Sie rechnerisch, ob sich gemäß dem hier gewählten mathematischen Modellen, eine Antragsberechtigung für Nothilfen ergibt. **(4BE)** Lösung S.36 Lösungsvideo

$\sum 43$

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I

1. Ein Telekommunikationsunternehmen bietet verschiedene Internetverträge an. Die Kunden können beim Vertragsabschluss zwischen den Tarifen „Basic“ (B) und „Highspeed“ (H) wählen. Zudem können sie beschließen, ob sie einen neuen Router bei diesem Unternehmen mitbestellen (R) oder sich anderweitig einen Router organisieren wollen ($\bar{R}$). Falls sie sich für die Router-Bestellung entscheiden, können sie noch zusätzlich bestimmen, ob sie den Router selbst installieren (S), einen Techniker hiermit beauftragen (T) oder sogar einen Komplettservice (K) wählen, bei dem auch die Endgeräte der Kunden durch Mitarbeiter des Unternehmens gleich angebunden werden.
Erfahrungsgemäß nehmen 60% der Kunden den „Basic“-Tarif. Unabhängig von der Tarifwahl entscheiden sich 80% der Kunden dafür einen Router mitzubestellen. Von diesen Kunden will stets die Hälfte den Router selbst installieren. Kunden, die den „Basic“ - Tarif mit Router wählen, möchten zu gleichen Anteilen einen Techniker kommen lassen oder den Komplettservice. Von den Kunden mit „Highspeed“ – Tarif und Router möchten 40% den Komplettservice.
Die zufällige Auswahl eines Kunden mit der Analyse seiner Vertragsoptionen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1. Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **(5BE)**

[Teilergebnis: $P(\{H; R; K\}) = 0{,}128$]

Lösung S.37 Lösungsvideo

1.2. Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ordert keinen firmeneigenen Router oder verlangt beim Wunsch nach einem firmeneigenen Router keinen Komplettservice.“

$E_2 = \{(B; R; K); (B; \bar{R}); (H; R; K); (H; \bar{R})\}$

$E_3 = E_1 \cap E_2$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_3 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_3)$. **(3BE)**

Lösung S.38 Lösungsvideo

1.3. Bei einem Telekommunikationsunternehmen gehen von einigen Kunden Beschwerden ein, dass die Internetverbindung oft unterbrochen wird. Bei einer Problemanalyse der Internetverbindung bei allen Kunden des Unternehmens soll untersucht werden, ob die Verbindungsabbrüche mit den verwendeten Router zusammenhängen (mitbestellter Router (R) oder anderweitig organisierter Router). Aus Unternehmensdaten gehen hervor, dass die Internetverbindung bei 60% aller Kunden ohne Unterbrechungen ($\overline{U}$) funktioniert. Die Hälfte aller Kunden hat eine unterbrechungsfreie Internetverbindung und einen beim Telekommunikationsunternehmen mitbestellten Router.
Es gilt weiterhin $P(R) = 0{,}8$.

Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel. Formulieren Sie im Sinne des vorliegenden Sachzusammenhangs eine Aussage in Worten, in der Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$ miteinander vergleichen. **(5BE)**

Lösung S.39 Lösungsvideo

2. In einer bestimmten Region Deutschlands sind vier verschiedene Arten von DSL-Internetanschlüssen verfügbar, wobei pro Haushalt nur genau eine der vier möglichen Anschlussarten gewählt werden kann. Die Tabelle veranschaulicht die Verteilung der verschiedenen Anschlüsse unter denjenigen Haushalten mit DSL-Anschluss:

Haushalte mit DSL 2000	Haushalte mit DSL 6000	Haushalte mit DSL 16000	Haushalte mit DSL 50000
17,3%	17,9%	19,8%	15,0%

Im Auftrag eines Internetdienstanbieters soll eine Umfrage zur Internetnutzung durchgeführt werden. Zu diesem Zweck werden 25 Haushalte der Region zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: **(6BE)**
E_4: „Genau drei der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 2000-Anschluss.“
E_5: „Mindestens sechs, aber weniger als zehn der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 50000-Anschluss.“
E_6: „Weniger als die Hälfte der ausgewählten Haushalte verfügen über einen DSL-Internetanschluss.“

Lösung S.40 Lösungsvideo

3. Für ein Glücksspiel wird eine gezinkte Münze verwendet, die der „Kopf“ mit der Wahrscheinlichkeit 40% fällt. Man zahlt 4€ Einsatz und wirft dreimal die Münze. Fällt dreimal Kopf, werden 20€ ausbezahlt. Wenn immer abwechselnd Kopf und Zahl auftreten, erhält man 10€. Sonst erfolgt keine Auszahlung.
Prüfen Sie, ob das Spiel für den Spieler günstig, fair oder ungünstig ist. **(4BE)**

Lösung S.41 Lösungsvideo

$\sum 23$

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik II

1. In einer Gärtnerei werden drei Blumenarten gezüchtet und verkauft. Es handelt sich dabei um Tulpen (T), Osterglocken (O) und Krokusse (K). Während Krokusse ausschließlich aus Blumenzwiebeln (B) und Osterglocken ausschließlich aus Samen (S) gezüchtet werden, werden Tulpen sowohl aus Blumenzwiebeln als auch aus Samen erzeugt. Von allen drei Blumenarten werden gelbe (g) und weiße (w) zum Verkauf angeboten.

Die Hälfte aller verkauften Blumen sind Tulpen. Die beiden anderen Blumensorten werden jeweils zu gleichen Anteilen verkauft. Die aus Samen wachsenden Tulpen haben unter dieser Blumenart einen Verkaufsanteil von 40%. Unabhängig von Blumensorte und Züchtungsform werden 75% aller verkauften Blumen mit der Farbe Gelb gewählt.

Der Kauf einer Blume hinsichtlich ihrer Eigenschaften Blumenart, Züchtungsform und Farbe wird im Folgenden als Zufallsexperiment mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betrachtet.

1.1. Erstellen Sie für das vorliegende Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und ermitteln Sie alle acht Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten. **(5BE)**
[Teilergebnis: $P(\{(T;B;g)\}) = 0{,}225$

Lösung S.42 Lösungsvideo

1.2. Nun werden folgende Ereignisse betrachtet: **(3BE)**

E_1: „Die verkaufte Blume ist gelb und ist keine Tulpe."

$E_2 = \{(T;S;g); (T;S;w); (O;S;g); (O;S;w)\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_2 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_2)$.

Lösung S.42 Lösungsvideo

2. Im Gewächshaus der Gärtnerei werden in einem neu angelegten Beet 30 Tulpenzwiebeln nebeneinander eingesetzt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}85$ geht eine eingesetzte Tulpenzwiebel tatsächlich auf und es wächst daraus eine Tulpe.

2.1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus genau 25 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen. **(2BE)**

Lösung S.43 Lösungsvideo

2.2. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_3: „Genau zwei der Zwiebeln gehen nicht auf und diese wurden direkt nebeneinander eingesetzt." **(2BE)**

Lösung S.43 Lösungsvideo

2.3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus mindestens 29 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen. Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage für alle Werte von k mit $1 \leq k \leq 29$ wahr ist:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass aus 30 eingesetzten Tulpenzwiebeln mindestens k Tulpen entstehen, liegt nicht unter 4%." **(4BE)**

Lösung S.43 Lösungsvideo

3. Für eine Zufallsgröße X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	a	$2b$	b	0,1	0,1	0,04

3.1. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn der Erwartungswert von X gleich 1,7 ist. **(3BE)**
[Teilergebnis: $b = 0{,}2$]

Lösung S.44 Lösungsvideo

3.2. Die Blumensorte Tulpe erzeugt während ihres Wachstums sogenannte Tochterzwiebeln, die ihrerseits wieder zur Entstehung weiterer Tulpen führen. Die unter **3.** Aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der unter Aufgabe **3.1** bestimmten Werten für a und b gibt an, welche Anzahl von Tochterzwiebeln mit welcher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. **(4BE)**

Lösung S.44 Lösungsvideo

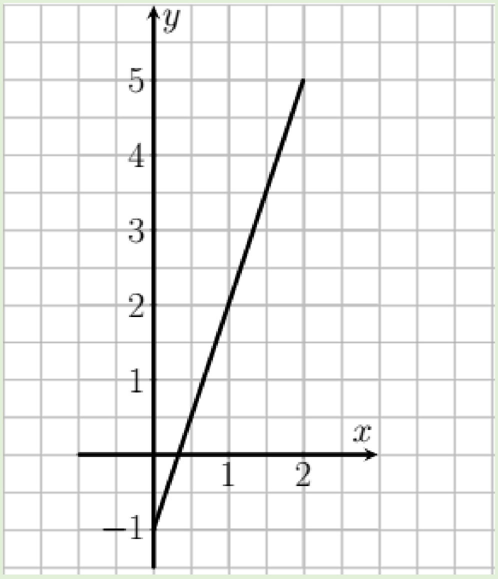
$\sum 23$

TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Analysis **LÖSUNG**

1. Gegeben ist die lineare Funktion $g: x \mapsto 3x - 1$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.1. Geben Sie die Nullstelle der Funktion g an und erstellen Sie eine Zeichnung vom Graphen G_g für $0 \leq x \leq 2$ in einem kartesischen Koordinatensystem. **(2BE)**

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 0 \qquad && | + 1 \\ 3x &= 1 && |: 3 \\ x_1 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Zurück zur Aufgabe

1.2 Berechnen Sie $\int_0^2 g(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrische bezüglich G_g. **(3BE)**

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x)\,dx &= \int_0^2 (3x - 1)\,dx \\ &= [1{,}5x^2 - x]_0^2 \\ &= (1{,}5 \cdot 2^2 - 2) - (1{,}5 \cdot 0^2 - 0) \\ &= 4 - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

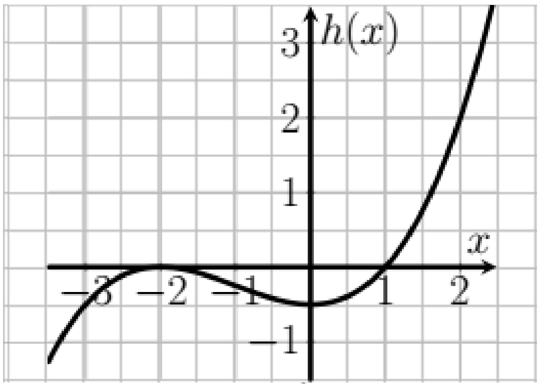
Interpretation: Die Flächenbilanz zwischen G_g und der x-Achse beträgt 4 FE.

$f(x) = x^n$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Zurück zur Aufgabe

2. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_h einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



Entscheiden Sie anhand des Graphen G_h , ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Die Nullstellen und die Extremstellen von h sind ganzzahlig und können der Abbildung entnommen werden. **(3BE)**

a) Es gilt: $h'(x) < 0$ für $x \in]-2; 1[$

Falsch: Mithilfe der Ableitungsfunktion wird die Steigung des Graphen an einer bestimmen Stelle angegeben. $h'(x) < 0$ bedeutet, dass der Graph im Intervall $]-2; 1[$ streng monoton fallend ist. Tatsächlich ist G_h jedoch im Intervall $[0; +\infty[$ streng monoton steigend.

Zurück zur Aufgabe

b) Der Graph der Stammfunktion H von h besitzt einen Terrassenpunkt.

Richtig, da h an der Stelle $x = -2$ eine doppelte Nullstelle (ohne Vorzeichenwechsel) besitzt.

Zurück zur Aufgabe

c) Es gilt: $h(-2) + h'(0) > 0$

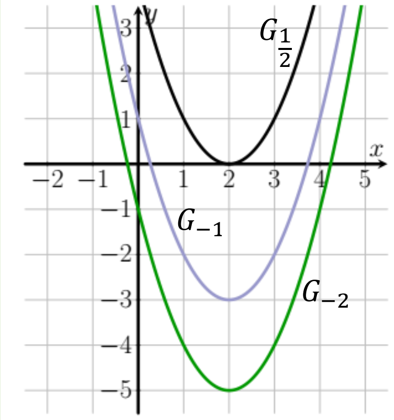
Falsch. Da $h(-2) = 0$ und $h'(0) = 0$ gilt, folgt $h(-2) + h'(0) = 0$.

Zurück zur Aufgabe

3. Eine nach oben geöffnete Parabeln besitzt den Scheitelpunkt $S(2|2k-1)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die zugehörige quadratische Funktion $p_k: x \mapsto p_k(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
Bestimmen Sie alle Werte für k, sodass die Parabel die x-Achse genau zweimal schneidet. **(2BE)**

Die Parabel ist nach oben geöffnet, also muss sich der Scheitelpunkt unterhalb der x −Achse befinden, damit der Graph die x −Achse zweimal schneidet.

$$\begin{aligned} \rightarrow 2k-1 &< 0 \qquad |+1 \\ 2k &< 1 \qquad |:2 \\ k &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$



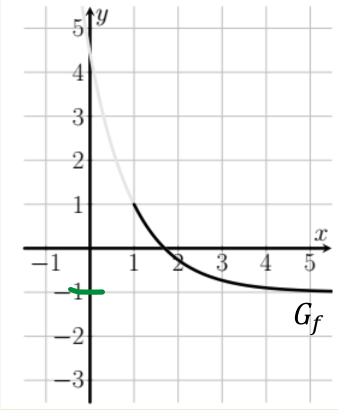
Beispielgraphen für $k = \frac{1}{2}$, $k = -1$ und $k = -2$.

Zurück zur Aufgabe

4. Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot e^{-x+1} - 1$ und der Definitionsmenge $D_f = [1; \infty[$. Bestimmen Sie die Wertemenge von f. **(4BE)**

Der Graph von f ist streng monoton fallend. Es gilt $f(1) = 2 \cdot e^{-1+1} - 1 = 2 - 1 = 1$.
Also hat G_f an der Stelle $H(1|1)$ einen absoluten Randhochpunkt. Für $x \to \infty$ nähert sich der Graph der waagrechten Asymptote mit der Gleichung $y = -1$ an.

→ $W_f =]-1; 1]$



Zurück zur Aufgabe

5. Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen. **(6BE)**

a) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\ x(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ 1. \qquad x_1 &= 0 \\ 2. \quad x^2 - 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

1. Möglichkeit

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 0 \\ x_{2,3} &= 1 \text{ (dopppelt)} \end{aligned}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm 0}{2} \\ &= 1 \text{ (doppelt)} \end{aligned}$$

b) $(e^x - 2)^2 - 4 = 0$

1. Möglichkeit

$$\begin{aligned} (e^x - 2)^2 - 4 &= 0 && | +4 \\ (e^x - 2)^2 &= 4 && |\sqrt{} \\ e^x - 2 &= \pm 2 && | +2 \\ e^x &= \pm 2 + 2 \\ 1. \quad e^x &= 0 && \rightarrow \text{keine Lösung} \\ 2. \quad e^x &= 4 && \rightarrow x_1 = \ln(4) \end{aligned}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned} (e^x - 2)^2 - 4 &= 0 \\ (e^x)^2 - 2 \cdot 2e^x + 4 - 4 &= 0 \\ e^{2x} - 4e^x &= 0 \\ e^x(e^x - 4) &= 0 \\ 1. \quad e^x &= 0 \quad \rightarrow \text{keine Lösung} \\ 2. \quad e^x &= 4 \quad \rightarrow x_1 = \ln(4) \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

6. Gegeben ist eine Modellfunktion zur Beschreibung der Entwicklung einer Bakterienpopulation im Labor durch $B: t \mapsto 2 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dabei steht die Variable t für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $B(t)$ für die Bakterienzahl in einer Petrischale. Formulieren Sie eine mögliche Problemstellung im Sinne der vorliegenden Thematik, deren Lösung auf die Gleichung $0{,}4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1}$ führt, und lösen Sie die Gleichung nach t_1 auf. **(2BE)**

Mögliche Problemstellung: Bestimmen Sie den Zeitpunkt zu dem noch 40% der ursprünglichen Bakterienzahl in der Schale vorhanden ist.

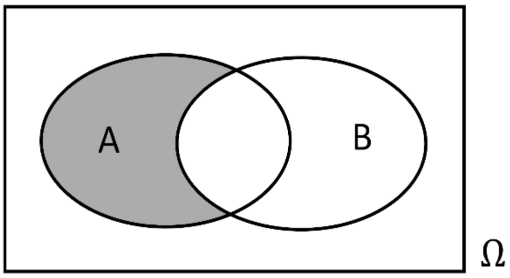
$$\begin{aligned} 0{,}4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1} && |ln \\ \ln(0{,}4) &= t_1 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) && |:\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ t_1 &= \frac{\ln(0{,}4)}{\ln(0{,}5)} = \log_{0{,}5}(0{,}4) \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

TEIL 1: ohne Hilfsmittel – Stochastik

1. A und B sind vereinbare Ereignisse des Ergebnisraums Ω. **(3BE)**

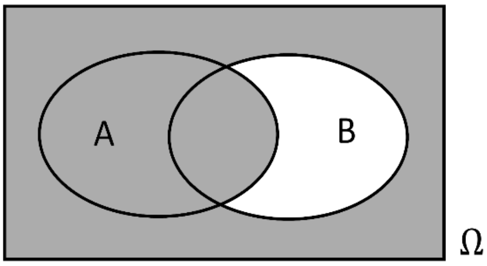
a) Geben Sie das im nebenstehenden Venn-Diagramm grau markierte Ereignis E_1 möglichst einfach als Verknüpfung der Ereignisse A und B an.



$E_1 = A \backslash B = A \cap \bar{B}$

Zurück zur Aufgabe

b) Veranschaulichen Sie das Ergebnis $E_2 = A \cup \bar{B}$ in einem Venn-Diagramm.



Zurück zur Aufgabe

2. Ein Handballspieler trainiert Siebenmeter-Weitwurf, wobei der Torhüter seines Vereins im Tor steht. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe ins Tor.

2.1 Der Spieler führt zwei Siebenmeter-Würfe aus.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: **(3BE)**

E_3: „Der Spieler trifft jedes Mal."
E_4: „Der Spieler trifft mindestens einmal."

$n = 2; p = 0{,}80;$

$P(E_3) = P_{0,80}^{2}(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}8^2 = 0{,}64$

$P(E_4) = P_{0,80}^{2}(X \geq 1) = 1 - P_{0,80}^{2}(X = 0) = 1 - 0{,}2^2 = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

Zurück zur Aufgabe

2.2 Formulieren Sie zwei Ereignisse E_5 und E_6 im Sachzusammenhang, deren Wahrscheinlichkeiten sich wie folgt berechnen lassen: **(2BE)**

$P(E_5) = 0{,}8^{20}$
$E_5 =$ „Der Handballer trifft bei 20 Würfen jedes Mal."

$P(E_6) = \binom{50}{30} \cdot 0{,}8^{30} \cdot 0{,}2^{20}$
$E_6 =$ „Der Handballer trifft bei 50 Würfen genau 30 Mal."

Zurück zur Aufgabe

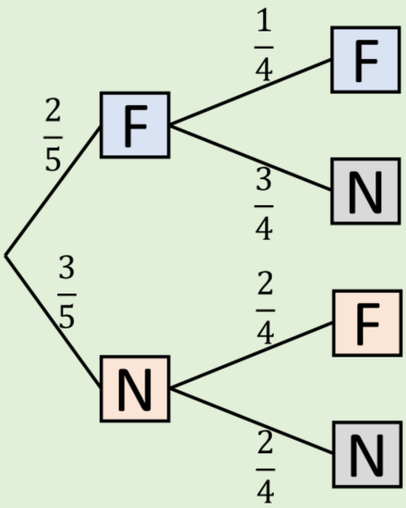
3. Einer Gruppe von fünf Jugendlichen werden zwei Freikarten für ein Rockkonzert zur Verfügung gestellt. Um diese zu verteilen, werden nacheinander Lose gezogen, ohne diese zurückzulegen. Jeder Jugendliche zieht dabei genau einmal. Neben den zwei Gewinnlosen für die Freikarten befinden sich drei Nieten in der Lostrommel.

Entscheiden Sie unter Zuhilfenahme einer geeigneten Rechnung, ob der Zweite, der zieht, die gleiche Chance auf eine Freikarte hat wie der Erste. **(4BE)**

Wir betrachten die ersten beiden Ziehungen der Lose mithilfe des nebenstehenden Baumdiagramms.

$F =$ „Freikarte“

$N =$ „Niete“



Chance auf eine Freikarte für die erste Person:

$P(F) = \frac{2}{5}$

Chance auf eine Freikarte für die zweite Person:

$$\begin{aligned} P(\text{„Freikarte beim zweiten Zug“}) &= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{10}+\frac{3}{10} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

→ Beide haben die gleichen Chancen.

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis I **LÖSUNG**

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1. Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Geben Sie die Wertemenge W_f an. **(9BE)**

$\boxed{f'(x) = a \cdot x^n}$

$\boxed{f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2 \\
f'(x) &= -\frac{4}{8}x^3 + 4x \\
f'(x) &= 0 \\
-\frac{1}{2}x^3 + 4x &= 0 \\
x(-\frac{1}{2}x^2 + 4) &= 0 \\
\text{1.} \quad x_1 &= 0 \text{ (einfach)} \\
\text{2.} \quad -\frac{1}{2}x^2 + 4 &= 0 && |-4 \\
-\frac{1}{2}x^2 &= -4 && |:\left(-\frac{1}{2}\right) \\
x^2 &= 8 && |\sqrt{} \\
x_{2,3} &= \pm\sqrt{8} \text{ (jeweils einfach)}
\end{aligned}
$$

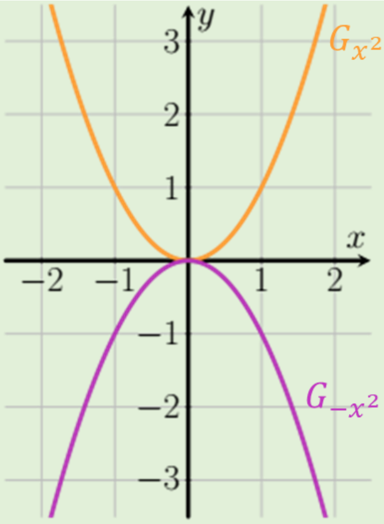
1. Möglichkeit: Vorzeichentabelle					(1)		
	$-\infty < x < -\sqrt{8}$	$x = -\sqrt{8}$	$-\sqrt{8} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{8}$	$x = \sqrt{8}$	$\sqrt{8} < x < \infty$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$	0	$+++$	0	$---$
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗	HOP	↘

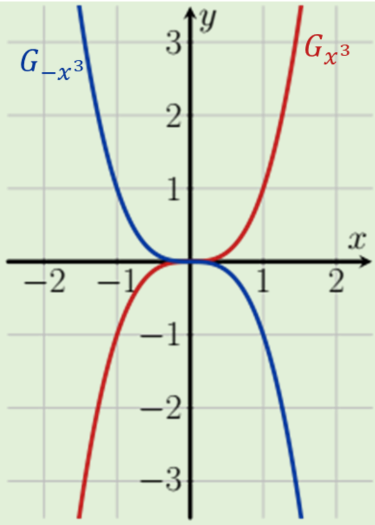
Probewert: $f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 3{,}5 > 0$

Oder: Globalverlauf des Graphen der Ableitungsfunktion

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x$

Der Graph von $f'(x)$ verläuft vom II. in den VI. Quadranten und es gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$





2. Möglichkeit: zweite Ableitungsfunktion betrachten

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4$$

$$f''(-\sqrt{8}) = -\frac{3}{2}\cdot(-\sqrt{8})^2 + 4 = -8 < 0 \rightarrow G_f \text{ hat HOP an dieser Stelle}$$

$$f''(0) = -\frac{3}{2}\cdot 0^2 + 4 = 4 > 0 \rightarrow G_f \text{ hat TIP an dieser Stelle}$$

$$f''(\sqrt{8}) = -\frac{3}{2}\cdot \sqrt{8}^2 + 4 = -8 < 0 \rightarrow G_f \text{ hat HOP an dieser Stelle}$$

Monotonieverhalten: (vergleiche dazu auch die Vorzeichentabelle oben)
f ist streng monoton zunehmend in den Intervallen $]-\infty; -\sqrt{8}]$ und $[0; \sqrt{8}]$.
f ist streng monoton abnehmend im Intervallen $[-\sqrt{8}; 0]$ und $[\sqrt{8}; +\infty[$.

Art und Koordinaten der Extrempunkte:

$$f(-\sqrt{8}) = -\frac{1}{8}\cdot(-\sqrt{8})^4 + 2\cdot(-\sqrt{8})^2 = 8$$

→ $HOP_1(-\sqrt{8}|8)$

$$f(0) = -\frac{1}{8}\cdot 0^4 + 2\cdot 0^2 = 0$$

→ $TIP_1(0|0)$

$$f(\sqrt{8}) = -\frac{1}{8}\cdot \sqrt{8}^4 + 2\cdot \sqrt{8}^2 = 8$$

→ $HOP_2(\sqrt{8}|8)$

Wertemenge: $W =]-\infty; 8]$ hier: Wertemenge

Zurück zur Aufgabe

1.2. Berechnen Sie die Wendestellen des Graphen von f und entscheiden Sie begründet, ob es sich dabei um Stellen mit maximaler positiver bzw. maximaler negativer Steigung von G_f handelt oder nicht. **(6BE)**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{2}x^3 + 4x \\
f''(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + 4 \\
-\frac{3}{2}x^2 + 4 &= 0 && |-4 \\
-\frac{3}{2}x^2 &= -4 && |:\left(-\frac{3}{2}\right) \\
x^2 &= \frac{8}{3} && |\sqrt{} \\
x_{1,2} &= \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\text{ (jeweils einfach)}
\end{aligned}
$$

Wenn $G_{f'}$ einen absoluten Hochpunkt besitzt, dann hat G_f eine Stelle stärkster Steigung (oder schwächster Abnahme).
Wenn $G_{f'}$ einen absoluten Tiefpunkt besitzt, dann hat G_f eine Stelle mit maximal negativer Steigung (oder schwächster Steigung).
f' ist vom Grad 3 und der Leitkoeffizient ist negativ.
→ $G_{f'}$ verläuft vom II. Quadranten in den IV. Quadranten
mit $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$
und $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$

→ $G_{f'}$ hat keinen absoluten Hochpunkt und keinen absoluten Tiefpunkt.
→ G_f hat keine Stelle mit maximaler negativer oder positiver Steigung.

Zurück zur Aufgabe

1.3. Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto -4x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade G_g Tangente an den Graphen G_f an der Stelle $x = -2$ ist. **(2BE)**

$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2; f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x;$

Wir zeigen zunächst, dass die beiden Graphen an der Stelle $x = -2$ einen gemeinsamen Punkt haben.

$g(-2) = -4 \cdot (-2) - 2 = 6$

$f(-2) = -\dfrac{1}{8} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 = 6$

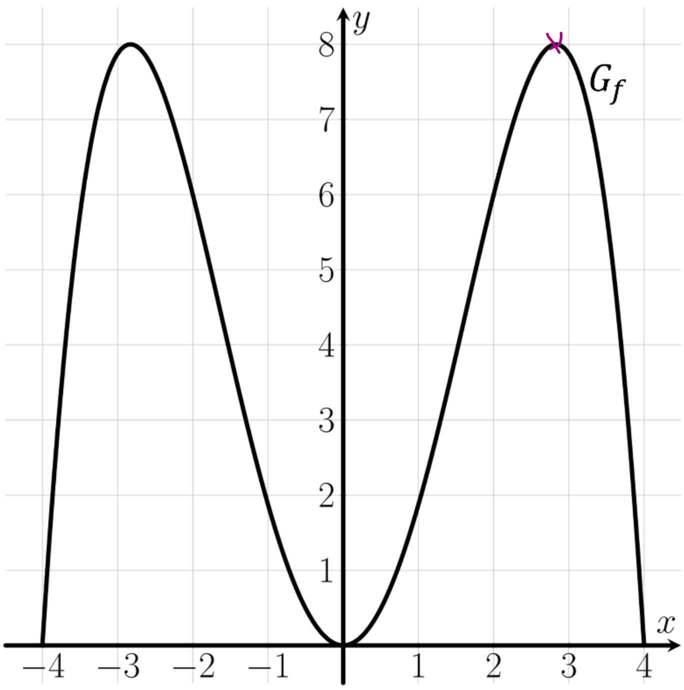
Wir zeigen, dass die Steigung von G_f an der Stelle $x = -2$, gleich der Steigung der Geraden ist.

$m_{-2} = f'(-2) = -\dfrac{1}{2} \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2) = -4 = m_g$

Der Punkt $(-2|6)$ liegt auf der Geraden und die Gerade hat die Steigung von G_f an dieser Stelle. → G_g ist die Tangente an G_f an der Stelle $x = -2$.

Zurück zur Aufgabe

1.4. Zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1cm$ **(4BE)**



Zurück zur Aufgabe

2. Während das Bundesamt für Naturschutz seit 20 Jahren die Ausbreitung von Wölfen in Deutschland fördert, fordern u.a. Weidetierhalter und Jäger zunehmend eine Aufhebung des Abschussverbots von Wölfen. Um über die eventuelle Aufhebung dieses Verbots zu entscheiden, soll die Entwicklung der Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland modelliert werden. Die Entwicklung seit dem Jahr 2008 lässt sich näherungsweise durch die Funktion N mit der Funktionsgleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$ mit $t, N_0, c \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $N_0 > 0$, $c > 0$ darstellen. Der Funktionswert von N gibt die Anzahl der Wolfsrudel in Deutschland zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die seit Ende des Jahres 2008 ($t_0 = 0$) vergangene Zeit in Jahren. Ende des Jahres 2013 wurden 18 Wolfsrudel in Deutschland gezählt. Ende 2017 lag die Zahl der Wolfsrudel bereits bei 60.

2.1. Bestimmen Sie die Werte der Parameter N_0 und c der Funktion N. Runden Sie N_0 ganzzahlig und c auf drei Nachkommastellen. **(4BE)**

$$N(t) = N_0 \cdot e^{c \cdot t}$$

$$\text{(I)} \quad 18 = N_0 \cdot e^{c \cdot 5} \qquad |: e^{c \cdot 5}$$

$$\text{(II)} \quad 60 = N_0 \cdot e^{c \cdot 9}$$

Zu (I):

$$N_0 = \frac{18}{e^{c \cdot 5}}$$

N_0 in (II)

$$\begin{aligned}
60 &= \frac{18}{e^{c \cdot 5}} \cdot e^{c \cdot 9} \\
60 &= \frac{18 \cdot e^{c \cdot 9}}{e^{c \cdot 5}} \\
60 &= 18 \cdot e^{c \cdot 9 - c \cdot 5} \\
60 &= 18 \cdot e^{4c} && |: 18 \\
\frac{10}{3} &= e^{4c} && |ln \\
\ln\left(\frac{10}{3}\right) &= 4c && |: 4 \\
c &= \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{4} \\
c &\approx 0{,}301
\end{aligned}$$

$$\rightarrow N_0 = \frac{18}{e^{c \cdot 5}}$$

$$N_0 \approx 4{,}00$$

Regel: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Beispiel:

$$\frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2}}{\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2}} = 2^{7-4} = 2^3$$

Veranschaulichung

Zurück zur Aufgabe

Hügel-Schule
BY HÜGEL RUDOLF
WIR BRINGEN DICH ÜBER DEN BERG

2.2 Im Folgenden gilt $N(t) = 4 \cdot e^{0,301 \cdot t}$.

2.2.1 Das Bundesamt für Naturschutz geht davon aus, dass Deutschland maximal Lebensraum für 440 Rudel bieten kann. Berechnen Sie, in welchem Jahr die Anzahl der Wolfsrudel laut dem Modell aus 2.0 voraussichtlich diesen Wert erreicht. **(3BE)**

$$\begin{aligned} 4 \cdot e^{0,301 \cdot t} &= 440 && |:4 \\ e^{0,301 \cdot t} &= 110 && |ln \\ 0,301 \cdot t &= \ln(110) && |:0,301 \\ t &= \frac{\ln(110)}{0,301} \\ t &\approx 15,62 \end{aligned}$$

$2008 + 15,62 = 2023,61$

In Jahr 2024 wird die Anzahl von 440 Rudel voraussichtlich diesen Wert erreichen.

Zurück zur Aufgabe

2.2.2 Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion N in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ $(b > 0)$ an und folgern Sie daraus die prozentuale Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel pro Jahr. Runden Sie b auf drei Nachkommastellen. **(2BE)**

$$\begin{aligned} 4 \cdot e^{0,301 \cdot t} &= 4 \cdot (e^{0,301})^t \\ &= 4 \cdot 1,351^t \end{aligned}$$

Die Zunahme der Anzahl der Wolfsrudel liegt bei ca. 35,1% pro Jahr.

Regel: $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$

Beispiel:

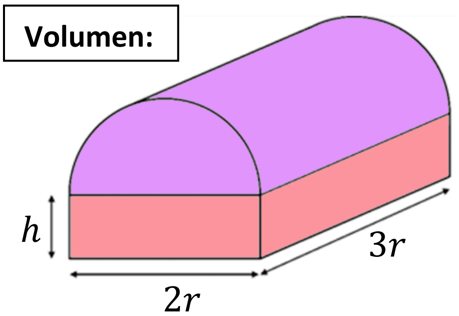
$2^{3 \cdot 2} = (2^3)^2 = 8^2 = 64$

$2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

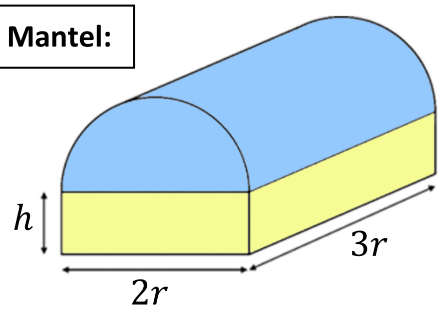
Zurück zur Aufgabe

3. Ein Tiergarten plant den Bau eines Tropenhauses, in dem ein künstliches Ökosystem mit Lebensbedingungen für tropische Pflanzen- und Tierarten geschaffen werden soll. Das Tropenhaus soll die Form eines Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder bekommen. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet. Der Quader hat die Breite $2r$, die Länge $3r$ und die Höhe h (siehe Skizze). Um möglichst ideal klimatische Bedingungen zu schaffen, sollen die Außenwände des Tropenhauses und das Dach aus Glas bestehen. Hierfür sind $1000m^2$ Glas vorgesehen. Die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses in Abhängigkeit von Radius r des Halbzylinders lässt sich durch die Funktionswerte der Funktion $V\colon r \mapsto V(r)$ beschrieben. Aus den Baurichtlinien geht hervor, dass der Radius r des Halbzylinders maximal $8{,}5m$ betragen darf. Der Tiergartenbetreiber fordert hierfür mindestens $4m$.

Volumen:



Mantel:



3.1. Stellen Sie eine Gleichung der in 3.0 eingeführten Funktion V auf. Bestimmen Sie dazu vorab die Maßzahl A des Flächeninhalts der insgesamt zu verglasenden Oberfläche des Tropenhauses in Abhängigkeit des Radius des Halbzylinders und der Höhe des Quaders. [Mögliche Ergebnisse: $A(r,h) = 10rh + 4\pi r^2$ und $V(r) = 600r - 0{,}9\pi r^3$] **(6BE)**

Hauptbedingung:

$V(r,h) = 2r \cdot 3r \cdot h + \frac{1}{2} r^2\pi \cdot 3r$

Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} A(r,h) &= 2 \cdot h \cdot 2r + 2 \cdot h \cdot 3r + r^2\pi + \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot 3r \\ 1000 &= 10hr + r^2\pi + 3r^2\pi \\ 1000 &= 10hr + 4r^2\pi && | - 4r^2\pi \\ 1000 - 4r^2\pi &= 10hr && |: (10r) \\ h &= \frac{1000 - 4r^2\pi}{10r} \end{aligned}$$

Zielfunktion:

$V(r)$	$=$	$2r \cdot 3r \cdot \frac{1000 - 4r^2\pi}{10r} + \frac{1}{2} r^2\pi \cdot 3r$	
$V(r)$	$=$	$3r \cdot \frac{(1000 - 4r^2\pi)}{5} + \frac{1}{2} r^2\pi \cdot 3r$	
$V(r)$	$=$	$\frac{3r(1000 - 4r^2\pi)}{5} + \frac{1}{2} r^2\pi \cdot 3r$	
$V(r)$	$=$	$\frac{3000}{5} r - \frac{12}{5} r^3\pi + \frac{3}{2} r^3\pi$	
$V(r)$	$=$	$600r - 0{,}9r^3\pi$	$D_V = [4; 8{,}5]$

Zurück zur Aufgabe

3.2. Um den Pflanzen und Tieren möglichst viel Lebensraum zur Verfügung zu stellen, soll das Tropenhaus maximalen Rauminhalt besitzen.
Bestimmen Sie den Radius r so, dass die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses den absolut größten Wert annimmt und geben Sie diesen maximalen Wert an. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **(7BE)**

$$\begin{aligned} V(r) &= -0{,}9r^3\pi + 600r && D_V = [4; 8{,}5] \\ V'(r) &= -0{,}9 \cdot 3r^2\pi + 600 \\ -0{,}9 \cdot 3r^2\pi + 600 &= 0 \\ -2{,}7r^2\pi + 600 &= 0 && |-600 \\ -2{,}7r^2\pi &= -600 && |:(-2{,}7\pi) \\ r^2 &= \frac{-600}{-2{,}7\pi} \\ r^2 &= \frac{2000}{9\pi} && |\sqrt{} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = a \cdot x^n}$$

$$\boxed{f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

$r_1 = \sqrt{\frac{2000}{9\pi}} \approx 8{,}41 \in D_V$; (einfach) $\quad r_2 = -\sqrt{\frac{2000}{9\pi}} \approx -8{,}41 \notin D_V$;

Vorzeichentabelle:

	$4 \leq r < \sqrt{\frac{2000}{9\pi}}$	$r = \sqrt{\frac{2000}{9\pi}}$	$\sqrt{\frac{2000}{9\pi}} < r \leq 8{,}5$
$V'(x)$	$+++$	0	$---$
G_V	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

PW: $V'(5) = -0{,}9 \cdot 5^3\pi + 600 \cdot 5 > 0$

→ G_V hat einen absoluten Hochpunkt bei $r = \sqrt{\frac{2000}{9\pi}}$.

$V_{max} = -0{,}9\sqrt{\frac{2000}{9\pi}}^3 \pi + 600 \cdot \sqrt{\frac{2000}{9\pi}} = 3364{,}18$

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Analysis II **LÖSUNG**

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1. Geben Sie die Nullstellen der Funktion f mit ihrer jeweiligen Vielfachheit an. **(3BE)**

$$f(x) = -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24)$$

Die Funktionsgleichung ist in der sogenannten Produktform angegeben. Hier kann man erkennen, welche Zahlen eingesetzt werden müssen, damit der Term gleich null wird.

Nullstellen: $x_1 = 0$ (einfach); $x_{2,3} = 10$ (doppelt); $x_4 = 24$ (einfach);

Zurück zur Aufgabe

1.2. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{100}(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x)$ darstellen lässt. **(3BE)**

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{100}x(x-10)^2(x-24) \\
f(x) &= -\frac{1}{100}x(x^2-20x+100)(x-24) \\
f(x) &= -\frac{1}{100}x(x^3-20x^2+100x-24x^2+480x-2400) \\
f(x) &= -\frac{1}{100}x(x^3-44x^2+580x-2400) \\
f(x) &= -\frac{1}{100}(x^4-44x^3+580x^2-2400x)
\end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

1.3. Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
Geben Sie die Wertemenge W_f an. **(11BE)**

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{100}(x^4-44x^3+580x^2-2400x) \\ f'(x) &= -\frac{1}{100}(4x^3-132x^2+1160x-2400) \\ 0 &= -\frac{1}{100}(4x^3-132x^2+1160x-2400) \quad \left|:\left(-\frac{1}{100}\right)\right. \\ 0 &= 4x^3-132x^2+1160x-2400 \end{aligned}$$

Faktorregel

$f(x) = a \cdot g(x)$

$f'(x) = a \cdot g'(x)$

Taschenrechner: $x_1 = 3$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (4x^3-132x^2+1160x-2400):(x-3) = 4x^2-120x+800 \\ -(4x^3-12\ x^2) \\ \qquad -120x^2+1160x-2400 \\ \quad -(-120x^2+360\ x) \\ \qquad\qquad 800\ x-2400 \\ \qquad\quad -(800\ x-2400) \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4x^2-120x+800 &= 0 \quad |:4 \\ x^2-30x+200 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2-4\cdot 1\cdot 200}}{2\cdot 1} = \frac{30\pm\sqrt{100}}{2}$$

$x_2 = 10$ (einfach); $x_3 = 20$ (einfach);
$x_1 = 3$ (einfach);

1. Möglichkeit: Vorzeichentabelle

	(0)						
	$-\infty < x < 3$	$x=3$	$3<x<10$	$x=10$	$10<x<20$	$x=20$	$20<x<\infty$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$	0	$+++$	0	$---$
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗	HOP	↘

Probewert: $f'(0) = -\frac{1}{100}(4\cdot 0^3-132\cdot 0^2+1160\cdot 0-2400) = 24 > 0$

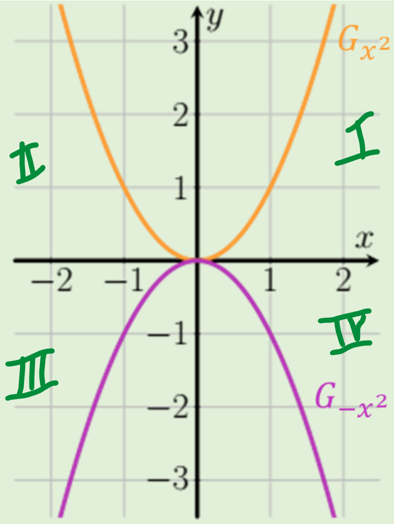
Oder: Globalverlauf des Graphen der Ableitungsfunktion

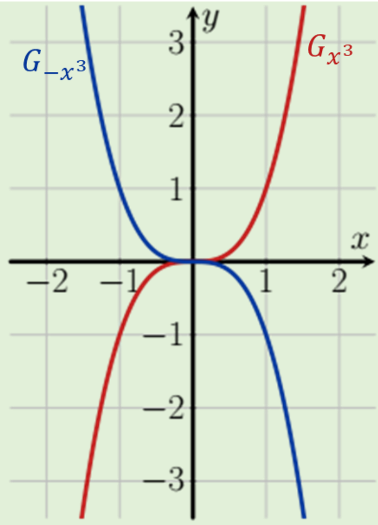
$f'(x) = -\frac{1}{100}(4x^3-132x^2+1160x-2400)$

$f'(x) = -\frac{4}{100}x^3+\frac{132}{100}x^2-\frac{1160}{100}x-\frac{2400}{100}$

$f'(x) = -0{,}04x^3+1{,}32x^2-11{,}6x-24$

Der Graph von $f'(x)$ verläuft vom II. in den VI. Quadranten und es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$





2. Möglichkeit: zweite Ableitungsfunktion betrachten

$$f'(x) = -\frac{1}{100}(4x^3 - 132x^2 + 1160x - 2400)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{100}(12x^2 - 264x + 1160)$$

$$f''(3) = -\frac{1}{100}(12 \cdot 3^2 - 264 \cdot 3 + 1160) = -4{,}76 < 0$$

→ G_f hat HOP an dieser Stelle

$$f''(10) = -\frac{1}{100}(12 \cdot 10^2 - 264 \cdot 10 + 1160) = 2{,}8 > 0$$

→ G_f hat TIP an dieser Stelle

$$f''(20) = -\frac{1}{100}(12 \cdot 20^2 - 264 \cdot 20 + 1160) = -6{,}8 < 0$$

→ G_f hat HOP an dieser Stelle

Art und Koordinaten der Extrempunkte:

$$f(3) = -\frac{1}{100}(3^4 - 44 \cdot 3^3 + 580 \cdot 3^2 - 2400 \cdot 3) = 30{,}87$$

→ $HOP_1(3|30{,}87)$

$$f(10) = -\frac{1}{100}(10^4 - 44 \cdot 10^3 + 580 \cdot 10^2 - 2400 \cdot 10) = 0$$

→ $TIP_1(10|0)$

$$f(20) = -\frac{1}{100}(20^4 - 44 \cdot 20^3 + 580 \cdot 20^2 - 2400 \cdot 20) = 80$$

→ $HOP_2(20|80)$

Wertemenge: $W =]-\infty; 80]$

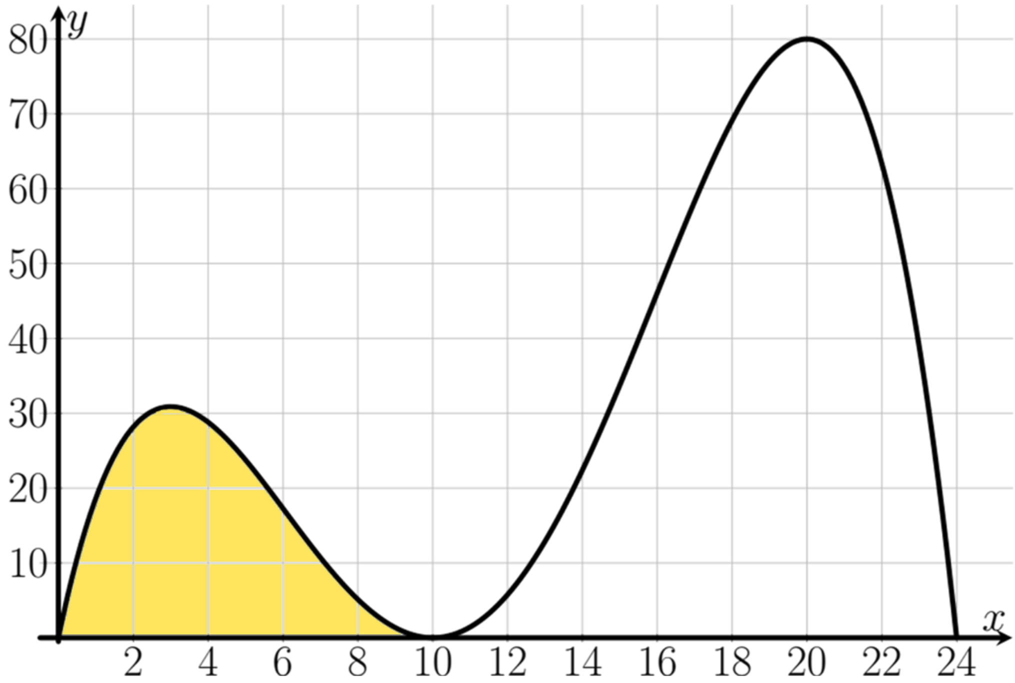
hier: Wertemenge

Zurück zur Aufgabe

Hügel-Schule BY HÜGEL RUDOLF

WIR BRINGEN DICH ÜBER DEN BERG

1.4. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $0 \leq x \leq 24$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. **(5BE)**



Zurück zur Aufgabe

1.5. Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. **(4BE)**

$$
\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x)\,dx &= \int_0^{10} -\frac{1}{100}\left(x^4 - 44x^3 + 580x^2 - 2400x\right)dx \\
&= -\frac{1}{100}\left[\frac{1}{5}x^5 - 11x^4 + \frac{580}{3}x^3 - \frac{2400}{2}x^2\right]_0^{10} \\
&= -\frac{1}{100}\Big[\frac{1}{5}10^5 - 11\cdot 10^4 + \frac{580}{3}\cdot 10^3 - \frac{2400}{2}\cdot 10^2 \\
&\qquad - \left(\frac{1}{5}0^5 - 11\cdot 0 + \frac{580}{3}\cdot 0^3 - \frac{2400}{2}\cdot 0^2\right)\Big] \\
&= -\frac{1}{100}\cdot\left[-\frac{50000}{3}\right] \\
&= \frac{500}{3}\quad [FE]
\end{aligned}
$$

Konstantenregel für Integrale

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$$

Potenzregel für Integrale

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Zurück zur Aufgabe

2. Landwirte beklagen zunehmend Ernteausfälle durch anhaltende Dürren in den Sommermonaten. Während der durchschnittliche Ertrag an Weizen pro Hektar Anbaufläche 2014 noch bei 86,3 Dezitonnen lag, brachte die Ernte von 2017 nur noch durchschnittlich 70,0 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche ein.
Basierend auf den seit dem Jahr 2014 ausgewerteten Daten kann die Ertragsentwicklung vereinfacht durch die Funktion $E: t \mapsto 56{,}3 \cdot e^{c \cdot t} + a$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$, $c \in \mathbb{R}^-$ und $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden. Der Funktionswert von E gibt den durchschnittlichen Weizenertrag in Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche zum Zeitpunkt t an. Dabei steht t für die vergangene Zeit in Jahren ab dem Jahr $2014\ (t_0 = 0)$.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1. Ermitteln Sie den Mittelwert der jährlichen Abnahme des durchschnittlichen Weizenertrags pro Hektar Anbaufläche über die Jahre 2014 bis 2017. **(3BE)**

Mittelwert: $\frac{70{,}0-86{,}3}{2017-2014} = \frac{-16{,}3}{3} \approx -5{,}43$
Der durchschnittliche Rückgang lag bei ca. $5{,}43$ Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche.

Zurück zur Aufgabe

2.2. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und c der Funktion E. Runden Sie c auf zwei Nachkommastellen. **(4BE)**

$$
\begin{array}{llll}
 & E(t) = 56{,}3 \cdot e^{c \cdot t} + a & \\
(I) & 86{,}3 = 56{,}3 \cdot e^{c \cdot 0} + a & \rightarrow a = 30 \\
 & 86{,}3 = 56{,}3 + a & \\
(II) & 70{,}0 = 56{,}3 \cdot e^{c \cdot 3} + a &
\end{array}
$$

a in (I):

$$
\begin{aligned}
70{,}0 &= 56{,}3 \cdot e^{c \cdot 3} + 30 && |-30 \\
40{,}0 &= 56{,}3 \cdot e^{c \cdot 3} && |:56{,}3 \\
\frac{40{,}0}{56{,}3} &= e^{3c} && |ln \\
3c &= \ln\left(\frac{40{,}0}{56{,}3}\right) && |:3 \\
c &= \frac{\ln\left(\frac{40{,}0}{56{,}3}\right)}{3} \approx -0{,}11
\end{aligned}
$$

Zurück zur Aufgabe

2.3 Im Folgenden gilt: $E(t) = 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t} + 30$

2.3.1 Einige Landwirte sind der Meinung, dass der Weizenanbau ab einem durchschnittlichen Weizenertrag von 50 Dezitonnen pro Hektar Anbaufläche nicht mehr rentabel für sie ist. Berechnen Sie, ab welchem Jahr dies laut dem Modell der Fall wäre. **(3BE)**

$$\begin{aligned}
E(t) &= 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t} + 30 && \\
50 &= 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t} + 30 && |-30 \\
20 &= 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot t} && |:56{,}3 \\
\frac{20}{56{,}3} &= e^{-0{,}11 \cdot t} && |ln \\
-0{,}11 \cdot t &= \ln\left(\frac{20}{56{,}3}\right) && |:(-0{,}11) \\
t &= \frac{\ln\left(\frac{20}{56{,}3}\right)}{-0{,}11} \approx 9{,}41 &&
\end{aligned}$$

Damit ist der Weizenabbau nach $t = 9$ Jahren noch rentabel, nach $t = 10$ Jahren aber nicht mehr. → Der Weizenabbau ist ab dem Jahr 2024 nicht mehr rentabel.

Zurück zur Aufgabe

2.3.2 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von E für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. **(3BE)**

$$\lim_{t\to\infty} E(t) = \lim_{t\to\infty} 56{,}3 \cdot \underbrace{e^{-0{,}11 \cdot t}}_{\to 0^+} + 30 = 30$$

Der Graph von E hat eine waagrechte Asymptote bei $y = 30$. Auf lange Sicht gesehen würde der durchschnittliche Weizenertrag pro Hektar Anbaufläche bei 30 Dezitonnen liegen.

Zurück zur Aufgabe

2.3.3 Sofern Landwirte 2018 mit einem massiven Einbruch ihrer Weizenerträge konfrontiert waren, hatten sie Anspruch auf Unterstützungszahlungen des Bundes. War ihr durchschnittlicher Weizenertrag pro Hektar Anbaufläche um mehr als 30% geringer als der Mittelwert der entsprechenden Erträge in den Jahren 2015, 2016 und 2017, so konnten sie einen Antrag auf Nothilfen stellen.

Prüfen Sie rechnerisch, ob sich gemäß dem hier gewählten mathematischen Modellen, eine Antragsberechtigung für Nothilfen ergibt. **(4BE)**

Durchschnittlicher Weizenertrag im Jahr 2018:
$E(4) = 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot 4} + 30 \approx 66{,}259;$

Durchschnittlicher Weizenertrag der entsprechenden Jahre.
$E(1) = 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot 1} + 30 \approx 80{,}435;$
$E(2) = 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot 2} + 30 \approx 75{,}182;$
$E(3) = 56{,}3 \cdot e^{-0{,}11 \cdot 3} + 30 \approx 70{,}475;$
Arithmetischer Mittelwert aus den Jahren 2015-2017:

$$\bar{E}_{1,2,3} = \frac{E(1) + E(2) + E(3)}{3} \approx 75{,}4$$

Prozentualer Anteil des Jahres 2018 vom Mittelwert der Erträge aus 2015, 2016 und 2017:
$\frac{E(4)}{\bar{E}_{1,2,3}} \approx 0{,}88$ → Gemäß den mathematischen Modellen ist der Ernteertrag um 12% geringer.
Demnach ergibt sich keine Antragsberechtigung für Nothilfen.

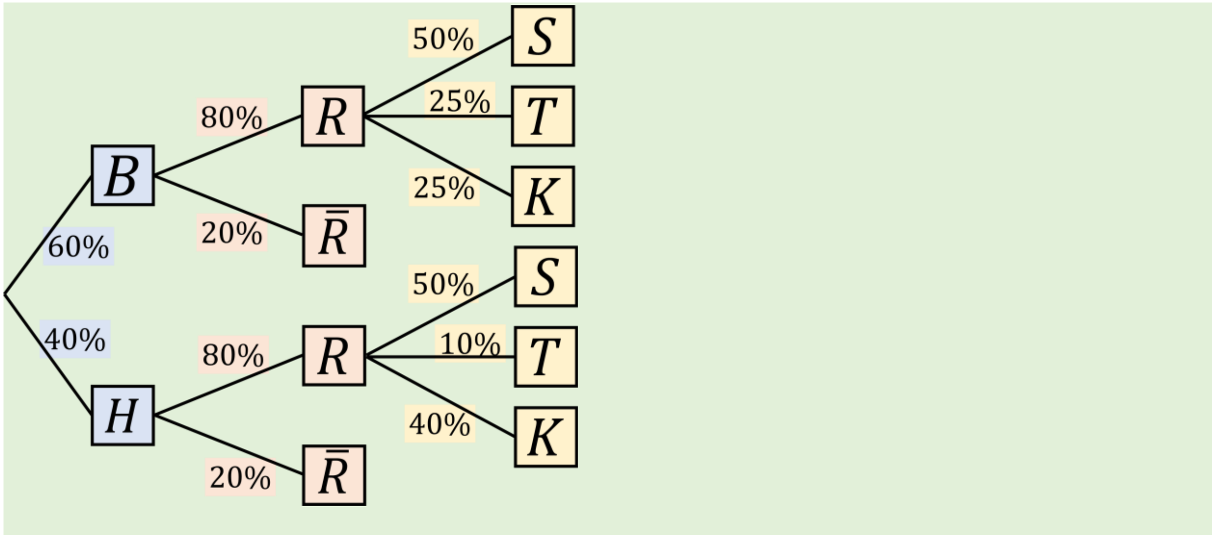
Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik I **LÖSUNG**

1. Ein Telekommunikationsunternehmen bietet verschiedene Internetverträge an. Die Kunden können beim Vertragsabschluss zwischen den Tarifen „Basic“ (B) und „Highspeed“ (H) wählen. Zudem können sie beschließen, ob sie einen neuen Router bei diesem Unternehmen mitbestellen (R) oder sich anderweitig einen Router organisieren wollen ($\bar{R}$). Falls sie sich für die Router-Bestellung entscheiden, können sie noch zusätzlich bestimmen, ob sie den Router selbst installieren (S), einen Techniker hiermit beauftragen (T) oder sogar einen Komplettservice (K) wählen, bei dem auch die Endgeräte der Kunden durch Mitarbeiter des Unternehmens gleich angebunden werden. Erfahrungsgemäß nehmen 60% der Kunden den „Basic“-Tarif. Unabhängig von der Tarifwahl entscheiden sich 80% der Kunden dafür einen Router mitzubestellen. Von diesen Kunden will stets die Hälfte den Router selbst installieren. Kunden, die den „Basic“ - Tarif mit Router wählen, möchten zu gleichen Anteilen einen Techniker kommen lassen oder den Komplettservice. Von den Kunden mit „Highspeed“ – Tarif und Router möchten 40% den Komplettservice. Die zufällige Auswahl eines Kunden mit der Analyse seiner Vertragsoptionen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1. Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **(5BE)**

[Teilergebnis: $P(\{H; R; K\}) = 0{,}128$]



ω	$(B;R;S)$	$(B;R;T)$	$(B;R;K)$	$(B;\bar{R})$	$(H;R;S)$	$(H;R;T)$	$(H;R;K)$	$(H;\bar{R})$
$P(\{\omega\})$	$0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5 = 0{,}24$	$0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}25 = 0{,}12$	$0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}25 = 0{,}12$	$0{,}6\cdot 0{,}2 = 0{,}12$	$0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5 = 0{,}16$	$0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 = 0{,}032$	$0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0{,}128$	$0{,}4\cdot 0{,}2 = 0{,}08$

Zurück zur Aufgabe

1.2. Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1: „Ein zufällig ausgewählter Kunde ordert keinen firmeneigenen Router oder verlangt beim Wunsch nach einem firmeneigenen Router keinen Komplettservice."

$E_2 = \{(B;R;K); (B;\bar{R}); (H;R;K); (H;\bar{R})\}$

$E_3 = E_1 \cap E_2$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_3 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_3)$. **(3BE)**

$E_1 = \{(B;R;S); (B;R;T); (B;\bar{R}); (H;R;S); (H;R;T); (H;\bar{R})\}$

$E_3 = E_1 \cap E_2 = \{(B;\bar{R}); (H;\bar{R})\}$

$E_3 =$ „Ein zufällig ausgewählter Kunde ordert keinen firmeneigenen Router."

$P(E_3) = 0{,}12 + 0{,}08 = 0{,}20$

Zurück zur Aufgabe

1.3. Bei einem Telekommunikationsunternehmen gehen von einigen Kunden Beschwerden ein, dass die Internetverbindung oft unterbrochen wird. Bei einer Problemanalyse der Internetverbindung bei allen Kunden des Unternehmens soll untersucht werden, ob die Verbindungsabbrüche mit dem verwendeten Router zusammenhängen (mitbestellter Router (R) oder anderweitig organisierter Router). Aus Unternehmensdaten gehen hervor, dass die Internetverbindung bei 60% aller Kunden ohne Unterbrechungen ($\overline{U}$) funktioniert. Die Hälfte aller Kunden hat eine unterbrechungsfreie Internetverbindung und einen beim Telekommunikationsunternehmen mitbestellten Router.
Es gilt weiterhin $P(R) = 0{,}8$.

Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$, z. B. mithilfe einer Vierfeldertafel. Formulieren Sie im Sinne des vorliegenden Sachzusammenhangs eine Aussage in Worten, in der Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$ miteinander vergleichen. **(5BE)**

	R	$\overline{R}$	
U	0,30	0,10	0,40
$\overline{U}$	0,50	0,10	0,60
	0,80	0,20	1

$$P_R(U) = \frac{P(U \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}30}{0{,}80} = 0{,}375$$

$$P_{\overline{R}}(U) = \frac{P(U \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}10}{0{,}20} = 0{,}50$$

Personen, die ihren Router anderweitig organisierten, haben häufiger Internetprobleme als Kunden die einen Router beim Anbieter mitbestellen.

Zurück zur Aufgabe

2. In einer bestimmten Region Deutschlands sind vier verschiedene Arten von DSL-Internetanschlüssen verfügbar, wobei pro Haushalt nur genau eine der vier möglichen Anschlussarten gewählt werden kann. Die Tabelle veranschaulicht die Verteilung der verschiedenen Anschlüsse unter denjenigen Haushalten mit DSL-Anschluss:

Haushalte mit DSL 2000	Haushalte mit DSL 6000	Haushalte mit DSL 16000	Haushalte mit DSL 50000
17,3%	17,9%	19,8%	15,0%

Im Auftrag eines Internetdienstanbieters soll eine Umfrage zur Internetnutzung durchgeführt werden. Zu diesem Zweck werden 25 Haushalte der Region zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse: **(6BE)**

E_4: „Genau drei der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 2000-Anschluss.“

E_5: „Mindestens sechs, aber weniger als zehn der ausgewählten Haushalte besitzen einen DSL 50000-Anschluss.“

E_6: „Weniger als die Hälfte der ausgewählten Haushalte verfügen über einen DSL-Internetanschluss.“

$$P(E_4) = \binom{25}{3} \cdot 0{,}173^3 \cdot 0{,}827^{22} = 0{,}18238$$

$$P(E_5) = F_{0,15}^{25}(9) - F_{0,15}^{25}(5)$$

$$= \sum_{i=0}^{9} B(25; 0{,}15; i) - \sum_{i=0}^{5} B(25; 0{,}15; i)$$

$$\overset{\text{TW}}{=} 0{,}99786 - 0{,}83848$$

$$= 0{,}15938$$

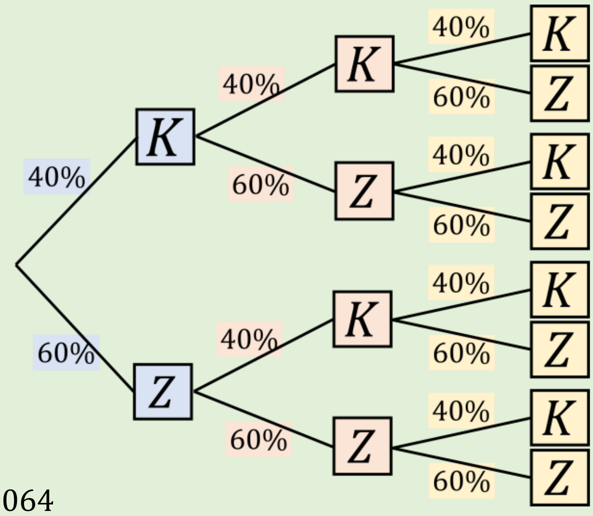
$$p_{DSL} = 17{,}3\% + 17{,}9\% + 19{,}8\% + 15{,}0\% = 70\%$$

$$P(E_6) = F_{0,70}^{25}(12) = 0{,}01747$$

$p = 0{,}15$		
k	$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;k)$
0	0,01720	0,01720
1	0,07587	0,09307
2	0,16067	0,25374
3	0,21738	0,47112
4	0,21099	0,68211
5	0,15638	0,83848
6	0,09199	0,93047
7	0,04406	0,97453
8	0,01749	0,99203
9	0,00583	0,99786
10	0,00165	0,99951

Zurück zur Aufgabe

3. Für ein Glücksspiel wird eine gezinkte Münze verwendet, die der „Kopf“ mit der Wahrscheinlichkeit 40% fällt. Man zahlt 4€ Einsatz und wirft dreimal die Münze. Fällt dreimal Kopf, werden 20€ ausbezahlt. Wenn immer abwechselnd Kopf und Zahl auftreten, erhält man 10€. Sonst erfolgt keine Auszahlung.
Prüfen Sie, ob das Spiel für den Spieler günstig, fair oder ungünstig ist. **(4BE)**



X: „Gewinn des Spielers in Euro.“

x	-4	6	16
$P(X=x)$	$0{,}696$	$0{,}24$	$0{,}064$

$$\begin{aligned} P(X=6) &= P(KZK, ZKZ) \\ &= 0{,}40^2 \cdot 0{,}60 + 0{,}60^2 \cdot 0{,}40 \\ &= 0{,}24 \\ P(X=16) &= 0{,}40^3 = 0{,}064 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= -4 \cdot 0{,}696 + 6 \cdot 0{,}24 + 16 \cdot 0{,}064 \\ &= -0{,}32 \end{aligned}$$

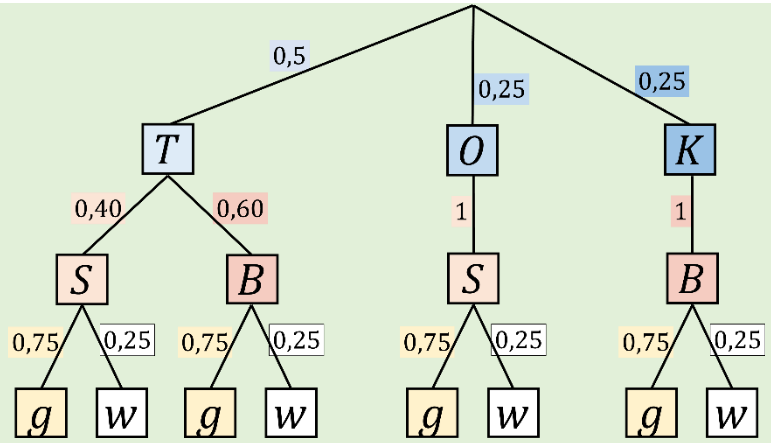
→ Das Spiel ist für den Spieler ungünstig.

Zurück zur Aufgabe

TEIL 2: mit Hilfsmittel – Stochastik II **LÖSUNG**

1. In einer Gärtnerei werden drei Blumenarten gezüchtet und verkauft. Es handelt sich dabei um Tulpen (T), Osterglocken (O) und Krokusse (K). Während Krokusse ausschließlich aus Blumenzwiebeln (B) und Osterglocken ausschließlich aus Samen (S) gezüchtet werden, werden Tulpen sowohl aus Blumenzwiebeln als auch aus Samen erzeugt. Von allen drei Blumenarten werden gelbe (g) und weiße (w) zum Verkauf angeboten. Die Hälfte aller verkauften Blumen sind Tulpen. Die beiden anderen Blumensorten werden jeweils zu gleichen Anteilen verkauft. Die aus Samen wachsenden Tulpen haben unter dieser Blumenart einen Verkaufsanteil von 40%. Unabhängig von Blumensorte und Züchtungsform werden 75% aller verkauften Blumen mit der Farbe Gelb gewählt. Der Kauf einer Blume hinsichtlich ihrer Eigenschaften Blumenart, Züchtungsform und Farbe wird im Folgenden als Zufallsexperiment mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betrachtet.

1.1. Erstellen Sie für das vorliegende Zufallsexperiment ein Baumdiagramm und ermitteln Sie alle acht Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten. **(5BE)**
[Teilergebnis: $P(\{(T;B;g)\}) = 0{,}225$]



ω	$(T;S;g)$	$(T;S;w)$	$(T;B;g)$	$(T;B;w)$	$(O;S;g)$	$(O;S;w)$	$(K;B;g)$	$(K;B;w)$
$P(\{\omega\})$	0,15	0,05	0,225	0,075	0,1875	0,0625	0,1875	0,0625

Zurück zur Aufgabe

1.2. Nun werden folgende Ereignisse betrachtet: **(3BE)**

E_1: „Die verkaufte Blume ist gelb und ist keine Tulpe."

$E_2 = \{(T;S;g); (T;S;w); (O;S;g); (O;S;w)\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_2 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P(E_2)$.

$E_1 = \{(O;S;g); (K;B;g)\}$
$E_2 =$ „Die verkaufte Blume ist aus Samen."
$P(E_2) = 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}1875 + 0{,}0625 = 0{,}45$

Zurück zur Aufgabe

2. Im Gewächshaus der Gärtnerei werden in einem neu angelegten Beet 30 Tulpenzwiebeln nebeneinander eingesetzt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}85$ geht eine eingesetzte Tulpenzwiebel tatsächlich auf und es wächst daraus eine Tulpe.

2.1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus genau 25 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen. **(2BE)**

$P_{0{,}85}^{30}(\text{„genau 25“}) = \binom{30}{25} \cdot 0{,}85^{25} \cdot 0{,}15^{5} \approx 0{,}18611$

(Hinweis: Der Wert steht auch im Tafelwerk)

Zurück zur Aufgabe

2.2. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_3: „Genau zwei der Zwiebeln gehen nicht auf und diese wurden direkt nebeneinander eingesetzt.“ **(2BE)**

$P_{0{,}15}^{30}(E_3) = 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{28} \cdot 29 \approx 6{,}89 \cdot 10^{-3} = 0{,}00689$

Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zurück zur Aufgabe

2.3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aus mindestens 29 der eingesetzten Zwiebeln Tulpen entstehen. Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage für alle Werte von k mit $1 \leq k \leq 29$ wahr ist:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass aus 30 eingesetzten Tulpenzwiebeln mindestens k Tulpen entstehen, liegt nicht unter 4%.“ **(4BE)**

$$P_{0{,}85}^{30}(\text{„mindesten 29 Tulpen entstehen“}) = \binom{30}{29} \cdot 0{,}85^{29} \cdot 0{,}15^{1} + \binom{30}{30} \cdot 0{,}85^{30} \cdot 0{,}15^{0}$$
$$\approx 0{,}04803$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Die Behauptung stimmt also für $k = 29$. Für $1 \leq k < 29$ liegen die Wahrscheinlichkeiten noch höher, da bei jeder der gesuchten Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeit für $k = 29$ kumulativ enthalten ist.

Beispiel:

Für $k = 28$:

$P_{0{,}85}^{30}(\text{„mind. 28 Tulpen entstehen“})$

$= \binom{30}{28} \cdot 0{,}85^{28} \cdot 0{,}15^{2} + \binom{30}{29} \cdot 0{,}85^{29} \cdot 0{,}15^{1} + \binom{30}{30} \cdot 0{,}85^{30} \cdot 0{,}15^{0}$

$\approx 0{,}10337 + 0{,}04803$

$= 0{,}15140$

Zurück zur Aufgabe

3. Für eine Zufallsgröße X ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	a	$2b$	b	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}04$

3.1. Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn der Erwartungswert von X gleich 1,7 ist. **(3BE)** [Teilergebnis: $b = 0{,}2$]

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot a + 1 \cdot 2b + 2b + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}04 \\ 1{,}7 &= 4b + 0{,}9 && |-0{,}9 \\ 0{,}8 &= 4b && |:4 \\ b &= 0{,}2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 2b + b + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}04 &= 1 \\ a + 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}04 &= 1 \\ a + 0{,}84 &= 1 && |-0{,}84 \\ a &= 0{,}16 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

3.2. Die Blumensorte Tulpe erzeugt während ihres Wachstums sogenannte Tochterzwiebeln, die ihrerseits wieder zur Entstehung weiterer Tulpen führen. Die unter **3.** Aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der unter Aufgabe **3.1** bestimmten Werten für a und b gibt an, welche Anzahl von Tochterzwiebeln mit welcher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. **(4BE)**

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$0{,}16$	$0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}04$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1{,}7 \\ Var(X) &= 0^2 \cdot 0{,}16 + 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}04 - 1{,}7^2 \\ &= 1{,}81 \\ \sigma(X) &= \sqrt{1{,}81} \approx 1{,}345 \end{aligned}$$

Werte innerhalb der einfachen Standardabweichung:

$$\begin{aligned} E(X) - \sigma(X) &\le X \le E(X) + \sigma(X) \\ 1{,}7 - 1{,}345 &\le X \le 1{,}7 + 1{,}345 \\ 0{,}355 &\le X \le 3{,}045 \end{aligned}$$

$\rightarrow X \in \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned} P(1 \le X \le 3) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe