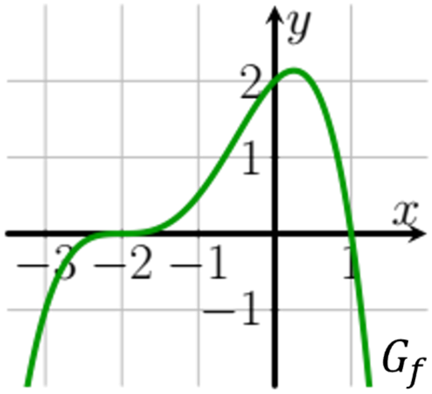
Inhaltsverzeichnis

Teil 1: ohne Hilfsmittel – Analysis

1. In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



1.1 Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an. Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen eine Funktionsgleichung der Funktion f. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden. **(4BE)**

Lösung S.14 Lösungsvideo

1.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. **(4BE)**
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$ b) $f''(1) < 0$

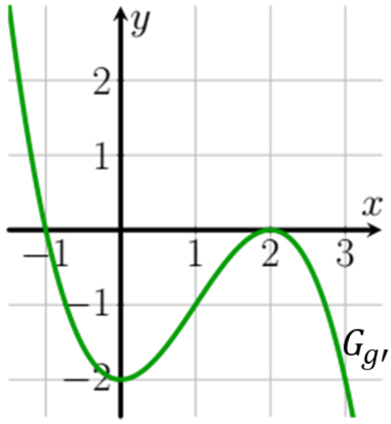
c) $f''(-2) = f'(-2)$ d) $W_f = \mathbb{R}$

Lösung S.15 Lösungsvideo

1.3 Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems einschließt. **(4BE)**

Lösung S.16 Lösungsvideo

2. g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g'. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



2.1 Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte. **(2BE)**

Lösung S.17 Lösungsvideo

2.2 Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an. **(3BE)**

Lösung S.17 Lösungsvideo

3. Gegeben sind Auszüge aus zwei Wertetabellen zu zwei Funktionen h und k mit der Definitionsmenge $D_h = D_k = \mathbb{R}_0^+$. Für die fehlenden Funktionswerte in den folgenden Tabellen gilt $h(x) \geq 0$ und $k(x) \geq 0$.

Tabelle 1

x	0	2	4
$h(x)$	7	5	

Tabelle 2

x	0	2	4
$k(x)$		9	15

Entscheiden Sie begründet, welcher der folgenden Funktionsterme zu Tabelle 1 bzw. zu Tabelle 2 gehört.

A) $8 - 3^{0,5\cdot x}$ B) $-x + 7$

C) $3^{0,5\cdot x} + 6$ D) $x + 7$

Geben Sie dann die fehlenden Tabellenwerte an. **(5BE)**

Lösung S.18 Lösungsvideo

$\sum 22\text{BE}$

Teil 1: ohne Hilfsmittel – Stochastik

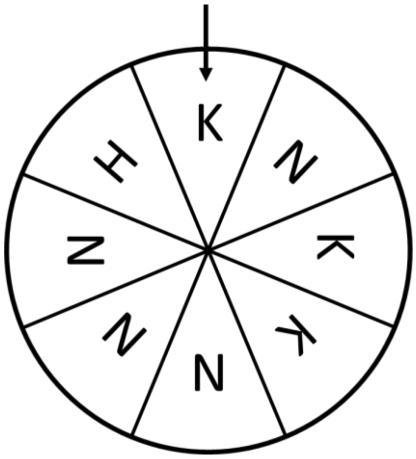
1. Die sechs Seiten eines Laplace-Würfels sind mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet. Dieser Würfel wird zweimal hintereinander geworfen.
Betrachtet wird folgendes Ereignis E.
E: „Die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen ist höchstens drei.“
Geben Sie E in aufzählender Mengenschreibweise an und ermitteln Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. **(3BE)**

Lösung S.19 Lösungsvideo

2. Für zwei gegebene Ereignisse A und B gilt: $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = 0$ und $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$, z.B. mithilfe der Vierfeldertafel. **(4BE)**

Lösung S.19 Lösungsvideo

3. Bei einem Gewinnspiel wird nebenstehendes Glücksrad gedreht, bei dem die einzelnen Kreissektoren gleich groß sind. Diesem Zufallsexperiment wird der Ergebnisraum $\Omega = \{H; K; N\}$ zugrunde gelegt. Dabei steht H für den Hauptgewinn, K für einen Kleingewinn und N für eine Niete.



3.1 Vier Personen drehen jeweils einmal am Glücksrad.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner von ihnen eine Niete erzielt. **(2BE)**

Lösung S.20 Lösungsvideo

3.2 Für einen Einsatz von 2€ darf man einmal am Glücksrad drehen. Für einen Hauptgewinn erhält der Teilnehmer 7€ und für einen Kleingewinn 3€ ausbezahlt. Bei einer Niete verfällt der Einsatz.
Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Auszahlung in Euro“ und interpretieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Einsatz. **(3BE)**

Lösung S.20 Lösungsvideo

$\sum 12\text{BE}$

Teil 2: mit Hilfsmitteln – Analysis I

1. Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vom Grad drei verläuft durch den Punkt $P(-1|0{,}5)$ und besitzt im Schnittpunkt mit der y-Achse einen Wendepunkt. Für die Wendetangente G_t gilt $t: y = 2x + 1$ mit der Definitionsmenge $D_t = \mathbb{R}$.

1.1 Stellen Sie ein Funktionsgleichung von f auf. **(6BE)**
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -1{,}5x^3 + 2x + 1$]

Lösung S.21 Lösungsvideo

1.2 Bestimmen Sie jeweils Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und begründen Sie, warum f nur eine einfache Nullstelle besitzt. **(8BE)**

Lösung S.22 Lösungsvideo

1.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Tangente G_t im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1cm$. **(5BE)**

Lösung S.23 Lösungsvideo

1.4 Der Graph G_f, die Tangente G_t und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **(5BE)**

Lösung S.23 Lösungsvideo

2. Der zeitliche Verlauf der Temperatur eines in einer großen Tasse eingeschenkten Frühstückstees wird in einem Schülerexperiment untersucht. Als Grundlage wird näherungsweise die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ verwendet. Dabei steht die Variable t für die Beobachtungszeit t in Minuten ab dem Beginn des Experiments, welches mit dem Eingießen des Tees in die Tasse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ startet. Der jeweilige Funktionswert von T gibt die Temperatur des Tees in $C°$ zum Zeitpunkt t an. Der Tee in der Tasse hat zu Beginn des Experiments um $8{:}55$ Uhr eine Temperatur von $80°C$. Um $9{:}15$ Uhr beträgt die Teetemperatur nur noch $30°C$.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b. Runden Sie gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Wert 22 im Funktionsterm der Funktion T für die Funktionswerte der Modellfunktion hat und bringen Sie diesen Wert in Zusammenhang mit dem durchgeführten Experiment. **(5BE)**

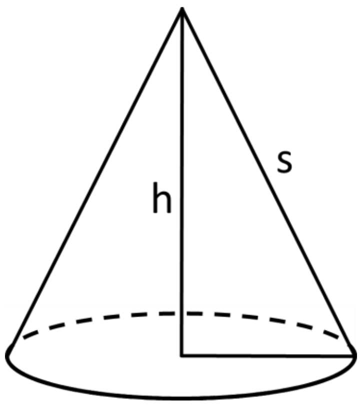
Lösung S.24 Lösungsvideo

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 58$; $b = -0{,}1$

2.2 Als angenehm wird eine Trinktemperatur von $54°C$ empfunden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit diese Temperatur erreicht wird. Runden Sie die Zeitangabe auf ganze Minuten. **(3BE)**

Lösung S.25 Lösungsvideo

3. Ein Tipi Zelt in einem Skigebiet hat die Form eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinie die Länge $s = 8m$ hat (siehe Zeichnung). Das Zelt besitzt ein Innenvolumen, das bei gleichbleibender Länge der Matellinie von der Höhe h des Zeltes abhängt. Der jeweilige Funktionswert der Funktion $V: h \longmapsto V(h)$ beschreibt dieses Innenvolumen.
Aus optischen Gründen soll dabei die Höhe h des Tipi Zeltes mindestens $4m$ und maximale $6m$ betragen. Dabei steht h für die Höhe des Zelts in m und $V(h)$ für das Volumen des Zelts in m^3.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf.
[mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$] **(3BE)**

Lösung S.26 | Lösungsvideo

3.2 Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h das Tipi Zelt den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie für welche Höhe h das Tipi Zelt den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie für diesen Fall den Durchmesser des Bodens des Tipi Zeltes. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **(8BE)**

Lösung S.27 | Lösungsvideo

$\sum 43BE$

Teil 2: mit Hilfsmitteln – Analysis II

1. Gegeben ist die Funktion f durch
$f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [-3; 4{,}5]$
sowie die lineare Funktion $g: y = \frac{15}{4}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Die Graphen der Funktionen f und g in einem kartesischen Koordinatensystem werden mit G_f bzw. G_g bezeichnet.

1.1 Geben Sie an, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
„Der Graph der Funktion f ist auf D_f achsensymmetrisch zur y-Achse." **(2BE)**

Lösung S.28 Lösungsvideo

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. **(5BE)**

Lösung S.28 Lösungsvideo

1.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an. **(8BE)**

Lösung S.29 Lösungsvideo

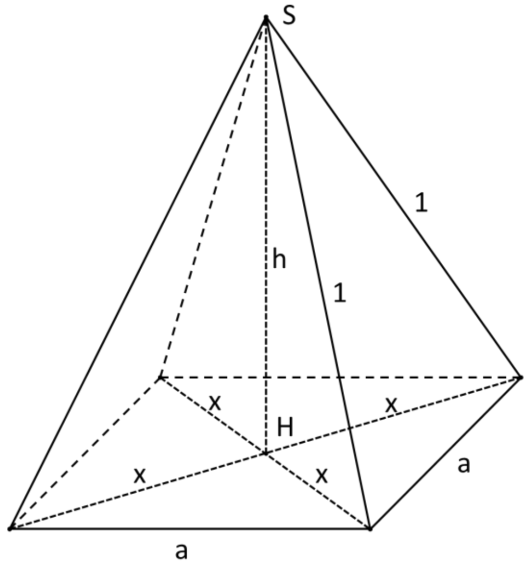
1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Geraden G_g in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1cm$ **(5BE)**

Lösung S.30 Lösungsvideo

1.5 Die Graphen der beiden Funktionen f und g schneiden sich an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = \sqrt{19}$ (Nachweis nicht erforderlich) und schließen somit zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. **(5BE)**

Lösung S.31 Lösungsvideo

2. Als Teilnehmer eines Auswahlverfahrens zur Einstellung von Werksstudenten bei einer großen Molkerei wird Ihnen folgende Aufgabe gestellt: Ein Schokodrink soll in einem Tetra Pak abgefüllt werden, welcher die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat. Die vier Seitenkanten der Pyramide sollten aus verpackungstechnischen Gründen jeweils eine feste Länge von $1dm$ haben. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt H, in dem sich die Diagonalen der Grundfläche im rechten Winkel schneiden.
Aus verkaufstechnischen Gründen soll die Höhe des Tetra Paks mindestens $0{,}4\ dm$ und höchstens $0{,}6\ dm$ betragen.



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

Zurück zum Inhaltverzeichnis

2.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ auf. Dabei steht h für die Höhe der Pyramide in dm und $V(h)$ für das Volumen der Pyramide in dm^3.
[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$] **(4BE)**

Lösung S.32 Lösungsvideo

2.2 Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h der Tetra Pak den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie dieses maximale Volumen. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **(7BE)**

Lösung S.33 Lösungsvideo

3. 90% einer Rasenfläche sind vermoost. Das Moos soll mit einem umweltverträglichen Mittel zurückgedrängt werden. Die zeitliche Entwicklung der vom Moos bedeckten Rasenfläche wird näherungsweise mittels der Modellfunktion M mit der Funktionsgleichung $M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Ausbringung des Mittels. Der jeweilige Funktionswert von M gibt die gesamte mit Moos bedeckte Fläche in m^2 zum Zeitpunkt t an. Bekannt ist, dass zwei Tage nach Ausbringung des Mittels von $400m^2$ und nach neun Tagen nur noch $140m^2$ vermoost sind.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

3.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b. Runden Sie a ganzzahlig und b auf zwei Nachkommastellen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche. **(5BE)**

Lösung S.34 Lösungsvideo

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 540$; $b = -0{,}15$;

3.2 Der Hersteller des umweltverträglichen Mittels wirbt damit, dass die mit Moos bedeckte Fläche nach der Ausbringung innerhalb einer Woche um ca. 65% zurückgehen wird. Überprüfen Sie diese Werbeaussage, indem Sie berechnen, nach wie vielen Tagen diese Reduzierung laut dem Modell aus 3.0 erreicht wird. Runden Sie auf ganze Tage. **(5BE)**

Lösung S.35 Lösungsvideo

$\sum 43\text{BE}$

Teil 2: mit Hilfsmitteln – Stochastik I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1. Der Betreiber eines Freizeitparks befragt eine große Anzahl seiner Besucher. Dabei interessiert ihn, ob diese aus der Region (R) kommen, ob es sich entweder um Tageskarteninhaber (T) oder Dauerkarteninhaber (D) handelt und ob sie mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot (Z), wie z.B. das 4D-Kino, in Anspruch nehmen.

Bei 80% der Befragten handelt es sich um Besucher, die nicht aus der Region stammen. Drei Viertel der Befragten aus der Region besitzen eine Dauerkarte. Nicht aus der Region stammende Befragte betreten den Park zu 90% mit einer Tageskarte. Unabhängig davon, ob Befragte mit Tageskarte aus der Region kommen oder nicht, nehmen sie zu 60% mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot in Anspruch. Unter den Befragten mit Dauerkarte aus der Region nutzen nur 10% mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot. Der Anteil der Befragten, die nicht aus der Region kommen, eine Dauerkarte kaufen und mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot nutzen, beträgt 4%.
Das Ergebnis der Befragung eines zufällig ausgewählten Besuchers wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. **(6BE)**

[Teilergebnis: $P(\{(\bar{R}; D; Z)\}) = 0{,}04$]

Lösung S.36 | Lösungsvideo

1.2 Gegeben sind die folgenden Ereignisse: **(7BE)**

E_1: „Ein zufällig ausgewählter Besucher kommt aus der Region oder besitzt eine Tageskarte.“

$$E_2 = \{(R;T;Z); (R;D;Z); (\bar{R};T;Z); (\bar{R};D;Z)\}$$

$$E_3 = \overline{E_1 \cup E_2}$$

a) Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung S.37 | Lösungsvideo

b) Fassen Sie E_3 im Sachzusammenhang möglichst einfach in Worte.

Lösung S.37 | Lösungsvideo

2. Dem Freizeitpark ist ein Campingplatz angegliedert, auf dem die Parkbesucher übernachten können. Nach Angaben des Betreibers nutzen 15% aller Parkbesucher diese Übernachtungsmöglichkeit (C). 60% aller Besucher kommen in den Schulferien (F) in den Freizeitpark. Von diesen nutzen 20% das Übernachtungsangebot.

2.1 Ermitteln Sie unter Verwendung einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Parkbesucher den Park außerhalb der Ferien besucht und die angegliederte Übernachtungsmöglichkeit in Anspruch nimmt. **(4BE)**

Lösung S.38 Lösungsvideo

2.2 An einem bestimmten Tag besuchen 200 Familien den Park. Insgesamt stehen 50 Campingstellplätze zur Verfügung. Eine Familie benötigt jeweils genau einen Stellplatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie auf dem Campingplatz übernachten möchte, beträgt erfahrungsgemäß 25%.
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **(6BE)**

a) die Anzahl der Campingstellplätze an diesem Tag nicht ausreicht.

Lösung S.38 Lösungsvideo

b) die Anzahl benötigten Campingstellplätze innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

Lösung S.38 Lösungsvideo

$\sum 23\text{BE}$

Teil 2: mit Hilfsmitteln – Stochastik II

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1. Ein Schreiner hat sich auf die Herstellung maßangefertigter Möbel spezialisiert. Er fertigt seine Möbel aus Fichten- oder Buchenholz und bietet sie mit gewachster (G) oder lackierter (L) Oberfläche an.
Erfahrungsgemäß entscheiden sich 40% seiner Kunden für Möbel aus Fichtenholz (F). Jeder dritte Kunde, der Möbel aus Fichtenholz in Auftrag gibt, bestellt diese mit lackierter Oberfläche. Unter den Kunden, die sich für die Holzart Buche (B) entscheiden, beträgt der Anteil derer, die ihre Möbel mit gewachster Oberfläche bestellen, 75%.

1.1 Berechnen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil von gewachsten Möbeln am Verkauf. **(4BE)**

Lösung S.39 Lösungsvideo

1.2 Berechnen Sie $P(B \cup G)$. **(2BE)**

Lösung S.39 Lösungsvideo

2. Für eine Zufallsgröße X ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	a	$b - a$	0,2	b	0,08	0,02

2.1 Bestimmen Sie die Werte für die Parameter a und b, wenn $E(X) = 3{,}12$ gilt.
[Teilergebnis: $a = 0{,}1$] **(4BE)**

Lösung S.40 Lösungsvideo

2.2 Die Lieferzeiten für die Möbel des Schreiners aus 1.0 sind abhängig von verschiedenen Faktoren, wie z.B. Auftragslage und Bestellumfang. Der Schreiner hat sich über Jahre hinweg die Lieferzeiten ab Auftragseingang notiert, um möglichst genaue Angaben zu den Lieferzeiten machen zu können.
Die unter 2.0 aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den unter 2.1 bestimmten Werten für a und b beschreibt die Lieferzeiten für die Möbel innerhalb der letzten Jahre. Die Zufallsgröße X gibt die Lieferzeiten ab Bestelldatum in vollen Wochen an. Lieferzeiten von mehr als sechs Wochen kamen bisher nicht vor.
Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: **(6BE)**

E_1: „Die Lieferzeit beträgt höchstens vier Wochen.“
E_2: „Bei genau drei von neun Bestellungen erfolgt die Lieferung der Möbel innerhalb einer Woche."
E_3: „Bei zehn nacheinander eingegangenen Bestellungen erfolgt nur bei der letzten die Lieferung der Möbel erst in der sechsten Woche, alle anderen erfolgen früher.“

Lösung S.40 Lösungsvideo

3. Gegen eine Gebühr liefert der Schreiner die gekauften Möbel an seine Kunden aus. Von insgesamt 200 Kunden stammen 80 aus einem Umkreis von $50km$ (U) um den Standort der Schreinerei. 128 Kunden nehmen den Lieferservice nicht in Anspruch $\overline{L}$.

Um die Auslieferungen besser planen zu können, hat der Schreiner in der folgenden Tabelle die Anzahl der zu beliefernden Kunden (L) – also insgesamt 72 – je nach Bestellumfang und Lieferort dargestellt.

	U	$\overline{U}$
≤ 2 Möbelstücke	7	17
> 2 Möbelstücke	18	30

3.1 Ergänzen Sie die nebenstehende Vierfeldertafel mithilfe der obigen Angaben.

Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mehr als 50 km von der Schreinerei entfernt wohnt und seine Möbel selbst abholt. **(4BE)**

	U	$\overline{U}$	Σ
L			
$\overline{L}$			
Σ			200

Lösung S.41 Lösungsvideo

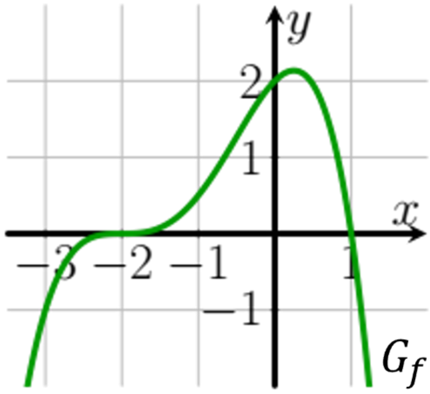
3.2 Beschreiben Sie mit eigenen Worten jeweils die Bedeutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_U(\overline{L})$ bzw. $P_{\overline{U}}(\overline{L})$ in Sachzusammenhang (ohne sie zu berechnen) und interpretieren Sie die hier geltende Beziehung $P_U(\overline{L}) > P_{\overline{U}}(\overline{L})$ im Sinne der vorliegenden Thematik. **(3BE)**

Lösung S.41 Lösungsvideo

$\sum 23BE$

Teil 1: ohne Hilfsmittel – Analysis: **Lösungen**

1. In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.



1.1 Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f sowie jeweils deren Vielfachheit an. Bestimmen Sie mithilfe dieser Nullstellen eine Funktionsgleichung der Funktion f. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden. **(4BE)**

G_f schneidet die x-Achse → f hat an dieser Stelle eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.
→ $x_1 = -2$ (dreifache Nullstelle); $x_2 = 1$ (einfache Nullstelle);

(Weitere Möglichkeit:
G_f berührt die x-Achse → f hat an dieser Stelle eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel.
Dieser Fall tritt hier nicht auf)

Wenn eine Funktion in ihre Linearfaktoren zerlegt werden kann, dann gilt:
$f(x) = a \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot (x - x_3)^{n_3} \cdot \ldots$
mit x_i ist Nullstelle und n_i deren Vielfachheit.

Hier: $f(x) = a \cdot (x+2)^3 \cdot (x-1)$
Nun soll noch die unbekannte a bestimmt werden. Dafür wird der Punkt $P(0|2)$ vom Graphen abgelesen und die Koordinaten in die Funktionsgleichung eingesetzt.
$f(0) = 2$

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ a \cdot (0+2)^3 \cdot (0-1) &= 2 \\ -8a &= 2 \qquad |:(-8) \\ a &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

→ $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x+2)^3 \cdot (x-1)$

Zurück zur Aufgabe

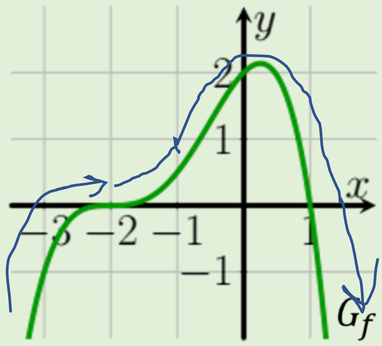
Zurück zum Inhaltverzeichnis

1.2 Entscheiden Sie anhand des Graphen G_f, ob die nachfolgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. **(4BE)**
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a) $f'(0) = -\frac{1}{2}$ b) $f''(1) < 0$

c) $f''(-2) = f'(-2)$ d) $W_f = \mathbb{R}$

a) falsch. $f'(x_0)$ beschreibt die Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0. Der Graph G_f ist an dieser Stelle steigend, also ist $f'(0)$ auf jeden Fall positiv.



Allgemein gilt:
Wenn G_f bei x_0 steigend ist, dann ist f' an dieser Stelle positiv.
Wenn G_f bei x_0 fallend ist, dann ist f' an dieser Stelle negativ.

b) richtig. Da G_f an dieser Stelle rechtgekrümmt ist, gilt $f''(1) < 0$.

Allgemein gilt:
Wenn G_f bei x_0 linksgekrümmt ist, dann ist f'' an dieser Stelle positiv.
Wenn G_f bei x_0 rechtsgekrümmt ist, dann ist f'' an dieser Stelle negativ.

c) richtig. G_f hat an der Stelle $x = -2$ einen Terrassenpunkt.
Dabei gilt: $f''(-2) = f'(-2) = 0$

d) falsch. Es gilt etwa: $W_f =]-\infty; 2{,}1[$

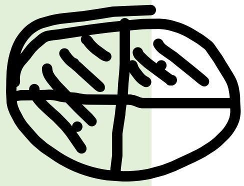
Link: Wertemenge bestimmen

Zurück zur Aufgabe

1.3 Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)$. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph G_f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten des Koordinatensystems einschließt. **(4BE)**

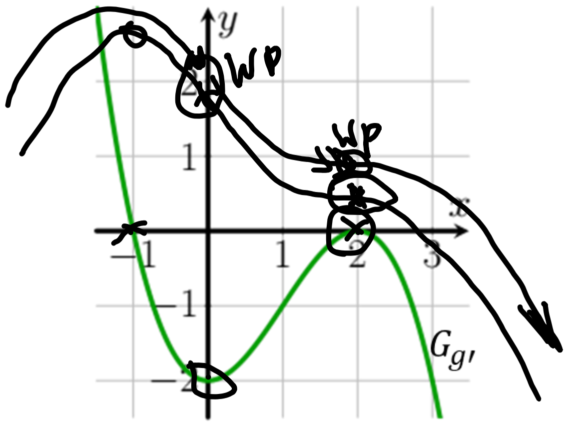
$$
\begin{aligned}
A = \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 -\frac{1}{4}\cdot(x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8)dx \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{6}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 - 8x\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{5}\cdot 1^5 + \frac{5}{4}\cdot 1^4 + 2\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - 8\cdot 1\right) - 0\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5} + \frac{5}{4} + 2 - 2 - 8\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4} + \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{5} - 8\cdot\frac{20}{20}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{4}{20} + \frac{25}{20} - \frac{160}{20}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[-\frac{131}{20}\right] \\
&= \frac{131}{80}
\end{aligned}
$$



[Link: Training zum Addieren und Subtrahieren von Brüchen]

Zurück zur Aufgabe

2. g ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. In der Abbildung sehen Sie ausschnittsweise den Graphen der Ableitungsfunktion g'. Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



f NETW

f' NEW

2.1 Geben Sie die Stellen an, an welchen der Graph der Funktion g Punkte mit horizontaler Tangente hat und benennen Sie jeweils die Art dieser Graphenpunkte. **(2BE)**

Allgemein:
Wenn $G_{f'}$ die x-Achse schneidet → G_f hat einen Extrempunkt an dieser Stelle.
Wenn $G_{f'}$ die x-Achse berührt → G_f hat einen Terrassenpunkt an dieser Stelle.

Hier:
$G_{f'}$ schneidet die x-Achse bei $x = -1$ von oben nach unten.
→ G_f hat einen (absoluten) Hochpunkt bei $x = -1$.

$G_{f'}$ berührt die x-Achse bei $x = 2$.
→ G_f hat einen Terrassenpunkt bei $x = 2$.

Zurück zur Aufgabe

2.2 Geben Sie mit Begründung die Wendestellen der Funktion g an. **(3BE)**

Die Extremstellen von g' beschreiben die Wendestellen von g.
→ g hat Wendestellen bei $x = 0$ und $x = 2$.

Zurück zur Aufgabe

3. Gegeben sind Auszüge aus zwei Wertetabellen zu zwei Funktionen h und k mit der Definitionsmenge $D_h = D_k = \mathbb{R}_0^+$. Für die fehlenden Funktionswerte in den folgenden Tabellen gilt $h(x) \geq 0$ und $k(x) \geq 0$.

Tabelle 1

x	0	2	4
$h(x)$	7	5	

Tabelle 2

x	0	2	4
$k(x)$		9	15

Entscheiden Sie begründet, welcher der folgenden Funktionsterme zu Tabelle 1 bzw. zu Tabelle 2 gehört.

A) $8 - 3^{0,5 \cdot x}$ B) $-x + 7$

C) $3^{0,5 \cdot x} + 6$ D) $x + 7$

Geben Sie dann die fehlenden Tabellenwerte an. **(5BE)**

A) $A(2) = 8 - 3^{0,5 \cdot 2} = 8 - 3^1 = 5$ → passt zu $h(x)$

$A(0) = 8 - 3^{0,5 \cdot 0} = 8 - 1 = 7$ → passt also zu $h(x)$

$A(4) = 8 - 3^{0,5 \cdot 4} = 8 - 3^2 = -1$ → passt nicht zu $h(x)$, da $h(x) \geq 0$ gilt. (vgl. Angabe)

B) $B(2) = -2 + 7 = 5$ → **passt zu $\boldsymbol{h(x)}$**

$B(0) = 0 + 7 = 7$ → **passt zu $\boldsymbol{h(x)}$**

$B(4) = -4 + 7 = \mathbf{3}$ → **passt zu $\boldsymbol{h(x)}$** → fehlender Tabellenwert

C) $C(2) = 3^{0,5 \cdot 2} + 6 = 3^1 + 6 = 9$ → **passt zu $\boldsymbol{k(x)}$**

$C(4) = 3^{0,5 \cdot 4} + 6 = 3^2 + 6 = 15$ → **passt zu $\boldsymbol{k(x)}$**

$C(0) = 3^{0,5 \cdot 0} + 6 = 1 + 6 = \mathbf{7}$ → **passt zu $\boldsymbol{k(x)}$**

D) $D(2) = 2 + 7 = 9$ → passt zu $k(x)$

$D(4) = 4 + 7 = 11$ → passt nicht

Zurück zur Aufgabe

Teil 1: ohne Hilfsmittel – Stochastik: **Lösungen**

1. Die sechs Seiten eines Laplace-Würfels sind mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet. Dieser Würfel wird zweimal hintereinander geworfen.
Betrachtet wird folgendes Ereignis E.
E: „Die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen ist höchstens drei."
Geben Sie E in aufzählender Mengenschreibweise an und ermitteln Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. **(3BE)**

$E = \{(1{,}1); (1; 2); (2; 1)\}$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Zurück zur Aufgabe

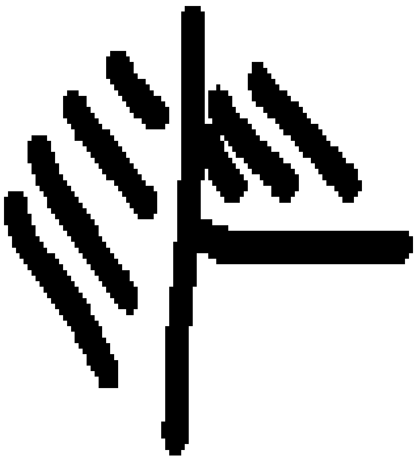
2. Für zwei gegebene Ereignisse A und B gilt: $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = 0$ und $P(A \cup B) = \frac{4}{9}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$, z.B. mithilfe der Vierfeldertafel. **(4BE)**

	A	$\bar{A}$	
B	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{9}$ **(aus** $\boldsymbol{P(A \cup B) = \frac{4}{9}}$**)**	$\frac{1}{9}$
$\bar{B}$	$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$
	$\frac{1}{3}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	1

$P(B) = \frac{1}{9}$

Zurück zur Aufgabe

3. Bei einem Gewinnspiel wird nebenstehendes Glücksrad gedreht, bei dem die einzelnen Kreissektoren gleich groß sind. Diesem Zufallsexperiment wird der Ergebnisraum $\Omega = \{H; K; N\}$ zugrunde gelegt. Dabei steht H für den Hauptgewinn, K für einen Kleingewinn und N für eine Niete.



3.1 Vier Personen drehen jeweils einmal am Glücksrad. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keiner von ihnen eine Niete erzielt. **(2BE)**

$$P(\text{„keine Niete“}) = \left(\frac{4}{8}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

oder

$$P(\text{„keine Niete“}) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^0 = \left(\frac{4}{8}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Zurück zur Aufgabe

3.2 Für einen Einsatz von 2€ darf man einmal am Glücksrad drehen. Für einen Hauptgewinn erhält der Teilnehmer 7€ und für einen Kleingewinn 3€ ausbezahlt. Bei einer Niete verfällt der Einsatz.
Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsgröße X: „Auszahlung in Euro“ und interpretieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit dem Einsatz. **(3BE)**

x (in €)	0	3	7
$P(X = x)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} = 0 + \frac{9}{8} + \frac{7}{8} = 2$$

Interpretation: Im Mittel entspricht die Auszahlung dem Einsatz. Damit handelt es sich um ein faires Spiel. Im Mittel gewinnt und verliert man nichts.

Zurück zur Aufgabe

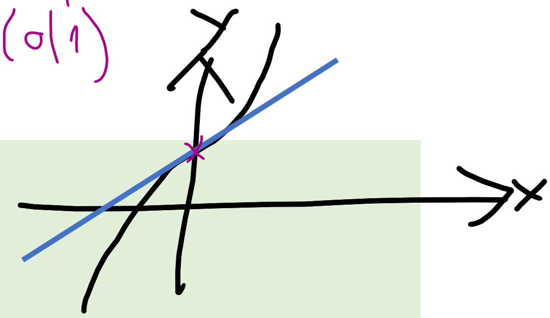
Teil 2: mit Hilfsmitteln – Analysis I: **Lösung**

1. Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vom Grad drei verläuft durch den Punkt $P(-1|0{,}5)$ und besitzt im Schnittpunkt mit der y-Achse einen Wendepunkt. Für die Wendetangente G_t gilt $t: y = 2x + 1$ mit der Definitionsmenge $D_t = \mathbb{R}$.

$y_s = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

$S_y(0|1)$

1.1 Stellen Sie ein Funktionsgleichung von f auf. **(6BE)**
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -1{,}5x^3 + 2x + 1$]



Funktion dritten Grades allgemein:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Wir benötigen 4 verwertbare Informationen, da wir 4 Unbekannte (a, b, c und d) haben.

1. $P(-1|0{,}5)$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0{,}5 \\ a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d &= 0{,}5 \\ \text{(I)} \quad -a + b - c + d &= 0{,}5 \end{aligned}$$

2. $f''(0) = 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \\ 6a \cdot 0 + 2b &= 0 \\ \text{(II)} \quad 2b &= 0 \end{aligned}$$

➔ $b = 0$

3. $f'(0) = 2$

$$\begin{aligned} f'(0) &= 2 \\ 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c &= 2 \\ \text{(III)} \quad c &= 2 \end{aligned}$$

➔ $c = 2$

4. $y_s = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \rightarrow S_y(0|1)$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &= 1 \\ \text{(IV)} \quad d &= 1 \end{aligned}$$

➔ $d = 1$

b, c und d in (I):

$$\begin{aligned} -a + 0 - 2 + 1 &= 0{,}5 && |+1 \\ -a &= 1{,}5 && |\cdot(-1) \\ a &= -1{,}5 \end{aligned}$$

➔ $f(x) = -1{,}5x^3 + 2x + 1$

Zurück zur Aufgabe

1.2 Bestimmen Sie jeweils Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f und begründen Sie, warum f nur eine einfache Nullstelle besitzt. **(8BE)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -1{,}5x^3 + 2x + 1 \\
f'(x) &= -4{,}5x^2 + 2 \\
-4{,}5x^2 + 2 &= 0 && |-2 \\
-4{,}5x^2 &= -2 && |:(-4{,}5) \\
x^2 &= \frac{4}{9} && |\sqrt{} \\
x_{1,2} &= \pm\tfrac{2}{3} \text{ (jeweils einfach, mit VZW)}
\end{aligned}
$$

Vorzeichentabelle:

x	$]-\infty; -\frac{2}{3}[$	$x = -\frac{2}{3}$	$]-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}[$	$x = \frac{2}{3}$	$]\frac{2}{3}; +\infty[$
$f'(x)$	$----$	0	$++++$	0	$----$
G_f	↘	TIP	↗	HOP	↘

Probewert: $f'(0) = 2 > 0$

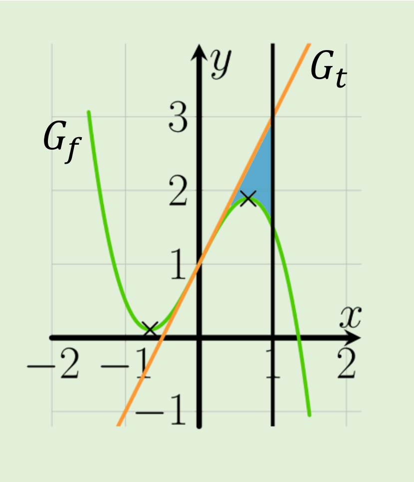
$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$ → relativer Tiefpunkt bei $T_1(-\frac{2}{3}|\frac{1}{9})$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{9} \approx 1{,}89$ → relativer Hochpunkt bei $H_1(\frac{2}{3}|\frac{17}{9})$

Da beide Extrempunkte oberhalb der x-Achse liegen und es sich um eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 handelt, ist nur genau eine einfache Nullstelle möglich.

Zurück zur Aufgabe

1.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Tangente G_t im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1cm$. **(5BE)**



Zurück zur Aufgabe

1.4 Der Graph G_f, die Tangente G_t und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus Aufgabe 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. **(5BE)**

$$
\begin{aligned}
A = \int_0^1 \big(t(x) - f(x)\big)dx &= \int_0^1 \big((2x+1) - (-1{,}5x^3 + 2x + 1)\big)dx \\
&= \int_0^1 1{,}5x^3 dx \\
&= \left[\frac{1{,}5}{4}x^4\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{3}{8}x^4\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{8}\cdot 1^4 - \left(\frac{3}{8}\cdot 0^4\right) \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Zurück zur Aufgabe

2. Der zeitliche Verlauf der Temperatur eines in einer großen Tasse eingeschenkten Frühstückstees wird in einem Schülerexperiment untersucht. Als Grundlage wird näherungsweise die Modellfunktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ verwendet. Dabei steht die Variable t für die Beobachtungszeit t in Minuten ab dem Beginn des Experiments, welches mit dem Eingießen des Tees in die Tasse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ startet. Der jeweilige Funktionswert von T gibt die Temperatur des Tees in $C°$ zum Zeitpunkt t an. Der Tee in der Tasse hat zu Beginn des Experiments um 8: 55 Uhr eine Temperatur von $80°C$. Um 9: 15 Uhr beträgt die Teetemperatur nur noch $30°C$.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b. Runden Sie gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Wert 22 im Funktionsterm der Funktion T für die Funktionswerte der Modellfunktion hat und bringen Sie diesen Wert in Zusammenhang mit dem durchgeführten Experiment. **(5BE)**

Um die Unbekannten a und b zu bestimmen benötigen wir zwei Gleichungen.
$f(0) = 80$; $f(20) = 30$;

(I)
$$\begin{aligned} a \cdot e^{b \cdot 0} + 22 &= 80 && \\ a + 22 &= 80 && \mid -22 \\ a &= 58 && \end{aligned}$$

(II) $a \cdot e^{b \cdot 20} + 22 = 30$
Wir setzen a aus (I) ein:
$$\begin{aligned} 58e^{20b} + 22 &= 30 && \mid -22 \\ 58e^{20b} &= 8 && \mid :58 \\ e^{20b} &= \frac{4}{29} && \mid \ln(\quad) \\ 20b &= \ln\left(\frac{4}{29}\right) && \\ b &= \frac{\ln\left(\frac{4}{29}\right)}{20} && \\ b &\approx -0{,}1 && \end{aligned}$$

→ $T(t) = 58 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 22$
Die Funktion nähert sich dem Wert 22 ($C°$) immer weiter an je mehr Zeit vergeht.
Der Wert 22 beschreibt also die Temperatur, die sich nach längerer Zeit beim Tee einstellt.

Zurück zur Aufgabe

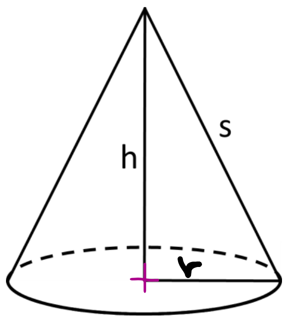
Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 58$; $b = -0{,}1$

2.2 Als angenehm wird eine Trinktemperatur von $54°C$ empfunden. Berechnen Sie, um welche Uhrzeit diese Temperatur erreicht wird. Runden Sie die Zeitangabe auf ganze Minuten. **(3BE)**

$$
\begin{aligned}
T(t) &= 54 && \\
58 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t_1} + 22 &= 54 && |-22 \\
58 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t_1} &= 32 && |:58 \\
e^{-0{,}1 \cdot t_1} &= \frac{16}{29} && |\ln(\quad) \\
-0{,}1 t_1 &= \ln\left(\frac{16}{29}\right) && |:(-0{,}1) \\
t_1 &= \frac{\ln\left(\frac{16}{29}\right)}{-0{,}1} && \\
t_1 &\approx 6 && \text{Uhrzeit 9:01 Uhr}
\end{aligned}
$$

Zurück zur Aufgabe

3. Ein Tipi Zelt in einem Skigebiet hat die Form eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinie die Länge $s = 8m$ hat (siehe Zeichnung). Das Zelt besitzt ein Innenvolumen, das bei gleichbleibender Länge der Matellinie von der Höhe h des Zeltes abhängt. Der jeweilige Funktionswert der Funktion $V: h \longmapsto V(h)$ beschreibt dieses Innenvolumen. Aus optischen Gründen soll dabei die Höhe h des Tipi Zeltes mindestens $4m$ und maximale $6m$ betragen. Dabei steht h für die Höhe des Zelts in m und $V(h)$ für das Volumen des Zelts in m^3.



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf.
[mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$] **(3BE)**

Hauptbedingung: $V(h,r) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V(h,r) = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Nebenbedingung:

$$s^2 = r^2 + h^2$$
$$8^2 = r^2 + h^2 \quad | - h^2$$
$$r^2 = 64 - h^2$$

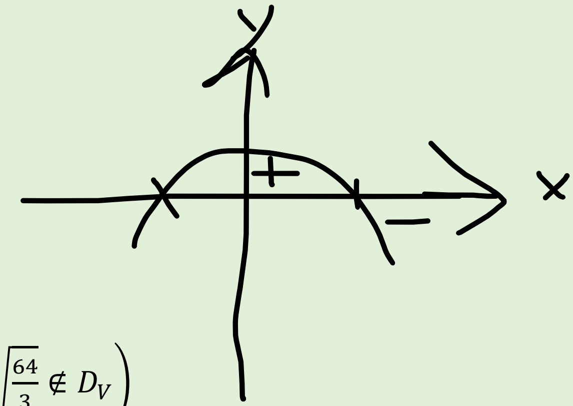
Zielfunktion:

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot (64 - h^2) \cdot \pi \cdot h \qquad D_V = [4; 6]$$
$$V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$$

Zurück zur Aufgabe

3.2 Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h das Tipi Zelt den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie für diesen Fall den Durchmesser des Bodens des Tipi Zeltes. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **(8BE)**

$$\begin{aligned} V'(h) &= -\pi h^2 + \frac{64}{3}\pi \\ 0 &= -\pi h^2 + \frac{64}{3}\pi && | + \pi h^2 \\ \pi h^2 &= \frac{64}{3}\pi && |:\pi \\ h^2 &= \frac{64}{3} && |\sqrt{} \\ h_1 &= \sqrt{\frac{64}{3}} && \left(h_2 = -\sqrt{\frac{64}{3}} \notin D_V\right) \\ h_1 &\approx 4{,}62 \end{aligned}$$



Vorzeichentabelle:

x	$[4; h_1[$	$h = h_1$	$]h_1; 6]$
$V'(x)$	$++++$	0	$----$
G_V	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Probewert: $V'(5) < 0$

oder statt Probewert: Der Graph von V' ist ein Teil einer nach unten geöffneten Parabel, woraus die Vorzeichentabelle folgt.

→ Der Graph von V hat an der Stelle $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$ einen absoluten Hochpunkt mit

$r_1 = \sqrt{64 - h^2} \approx 6{,}53$

→ Durchmesser: $d = 2 \cdot r_1 \approx 13{,}06$

Oder statt Vorzeichentabelle:

Der Graph von V' ist ein Teil einer nach unten geöffneten Parabel. Damit ist G_V im Intervall $[4; h_1]$ streng monoton steigend (sms) und im Intervall $[h_1; 6]$ streng monoton fallend (smf).

→ Der Graph von V hat an der Stelle einen absoluten Hochpunkt mit $r_1 = \sqrt{64 - h^2} \approx 6{,}53$

→ Durchmesser: $d = 2 \cdot r_1 \approx 13{,}06$

Zurück zur Aufgabe

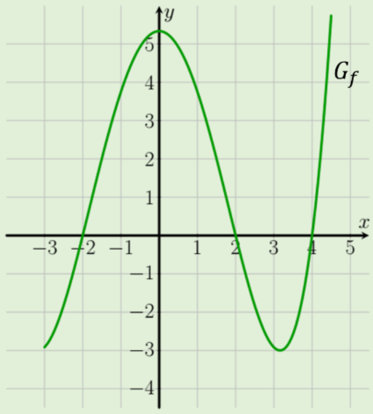
Teil 2: mit Hilfsmitteln – Analysis II: **Lösung**

1. Gegeben ist die Funktion f durch
$f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64)$ mit der Definitionsmenge $D_f = [-3; 4{,}5]$
sowie die lineare Funktion $g: y = \frac{15}{4}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.
Die Graphen der Funktionen f und g in einem kartesischen Koordinatensystem werden mit G_f bzw. G_g bezeichnet.

1.1 Geben Sie an, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
„Der Graph der Funktion f ist auf D_f achsensymmetrisch zur y-Achse.“ **(2BE)**

Zwar gilt $f(-x) = f(x)$, sofern alle Werte von $x \in D_f$ sind, aber aufgrund der Definitionsmenge ist G_f dennoch nicht achsensymmetrisch zur y-Achse (vgl. Graph). (D_f ist nicht symmetrisch zu $x = 0$)

$$f(-x) = \frac{1}{12}((-x)^4 - 20 \cdot (-x)^2 + 64)$$
$$= \frac{1}{12}(x^4 - 20 \cdot x^2 + 64) = f(x)$$



Zurück zur Aufgabe

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. **(5BE)**

$$f(x) = 0$$
$$\frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64) = 0 \quad | \cdot 12$$
$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

Substitution: $u := x^2$

$$u^2 - 20u + 64 = 0$$
$$u_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 12}{2}$$

→ $u_1 = 4; u_2 = 16;$

1. $x^2 = 4 \quad |\sqrt{}$
$x_{1,2} = \pm 2$ (jeweils einfach)

2. $x^2 = 16 \quad |\sqrt{}$
$x_3 = -4 \notin D_f$
$x_4 = 4$ (einfach)

Zurück zur Aufgabe

1.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte von G_f und geben Sie die Wertemenge W_f der Funktion f an. **(8BE)**

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64) \\ f'(x) &= \frac{1}{12}(4x^3 - 40x) \\ f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{12}(4x^3 - 40x) &= 0 \qquad | \cdot 12 \\ 4x^3 - 40x &= 0 \\ x(4x^2 - 40) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.\ x_1 &= 0 && \text{(einfach; mit VZW)} \\ 2.\ 4x^2 - 40 &= 0 && | + 40 \\ 4x^2 &= 40 && |: 4 \\ x^2 &= 10 && |\sqrt{} \\ x_2 &= -\sqrt{10} \notin D_f && \\ x_3 &= \sqrt{10} && \text{(einfach; mit VZW)} \end{aligned}$$

Vorzeichentabelle:

x	$[-3; 0[$	$x = 0$	$]0; \sqrt{10}[$	$x = \sqrt{10}$	$]\sqrt{10}; 4{,}5]$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	0	$++++$
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗

Probewert: $f'(1) = \frac{1}{12}(4 \cdot 1^3 - 40 \cdot 1) = -3 < 0$

Achtung! Man muss hier auch die Randextrempunkte betrachten:

$f(-3) = \frac{1}{12}((-3)^4 - 20 \cdot (-3)^2 + 64) = -\frac{35}{12} \approx -2{,}92$ → Randtiefpunkt $T_1(-3|-\frac{35}{12})$

$f(0) = \frac{1}{12}(0^4 - 20 \cdot 0^2 + 64) = \frac{16}{3}$ → Hochpunkt bei $H_1(0|\frac{16}{3})$

$f(\sqrt{10}) = \frac{1}{12}\left(\sqrt{10}^4 - 20 \cdot \sqrt{10}^2 + 64\right) = 3$ → Tiefpunkt bei $T_2(\sqrt{10}|-3)$ (absolut)

$f(4{,}5) = \frac{1}{12}(4{,}5^4 - 20 \cdot 4{,}5^2 + 64) = \frac{1105}{192} \approx 5{,}76$ → Randhochpunkt $H_2(4{,}5|\frac{1105}{192})$ (absolut)

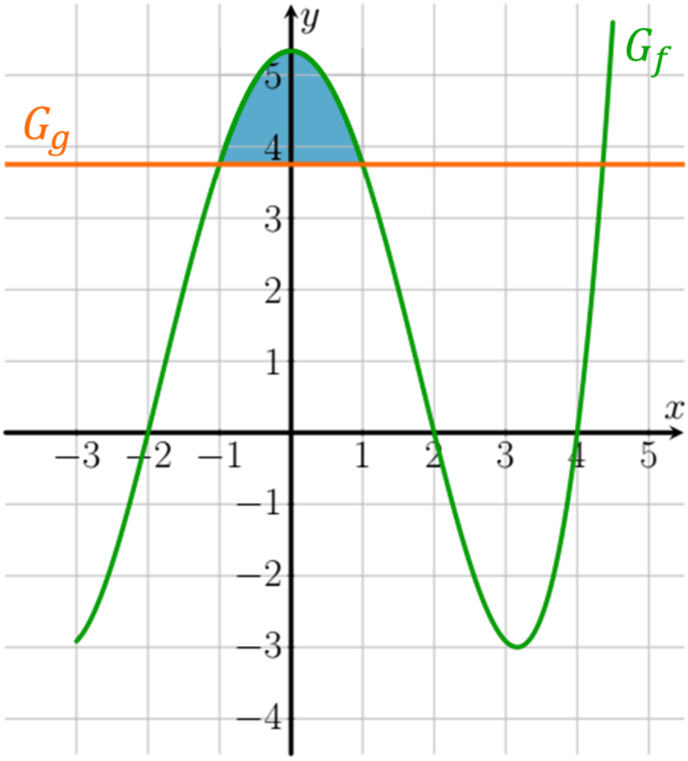
→ Wertemenge $W_f = [-3; \frac{1105}{192}]$

Zurück zur Aufgabe

Link: Wertemenge einfach bestimmen

Zurück zum Inhaltverzeichnis

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Geraden G_g in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1LE = 1cm$ **(5BE)**



Zurück zur Aufgabe

1.5 Die Graphen der beiden Funktionen f und g schneiden sich an den Stellen $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ und $x_3 = \sqrt{19}$ (Nachweis nicht erforderlich) und schließen somit zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des kleineren der beiden Flächenstücke. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. **(5BE)**

Das Flächenstück, dessen Flächeninhalt berechnet werden soll, ist bei Aufgabe **1.4** bereits gekennzeichnet.

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{12}(x^4 - 20x^2 + 64) - \frac{15}{4}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{20}{12}x^2 + \frac{64}{12} - \frac{15}{4}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{20}{12}x^2 + \frac{19}{12}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{60}x^5 - \frac{20}{36}x^3 + \frac{19}{12}x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\frac{1}{60}x^5 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{19}{12}x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{60} - \frac{5}{9} + \frac{19}{12}\right) - \left(\frac{1}{60}\cdot(-1)^5 - \frac{5}{9}\cdot(-1)^3 + \frac{19}{12}\cdot(-1)\right) \\
&= \left(\frac{47}{45}\right) - \left(-\left(\frac{47}{45}\right)\right) \\
&= \frac{94}{45} \\
&\approx 2{,}09
\end{aligned}
$$

Zurück zur Aufgabe

Zurück zum Inhaltverzeichnis

2. Als Teilnehmer eines Auswahlverfahrens zur Einstellung von Werksstudenten bei einer großen Molkerei wird Ihnen folgende Aufgabe gestellt: Ein Schokodrink soll in einem Tetra Pak abgefüllt werden, welcher die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat. Die vier Seitenkanten der Pyramide sollten aus verpackungstechnischen Gründen jeweils eine feste Länge von $1dm$ haben. Die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt H, in dem sich die Diagonalen der Grundfläche im rechten Winkel schneiden. Aus verkaufstechnischen Gründen soll die Höhe des Tetra Paks mindestens $0{,}4\ dm$ und höchstens $0{,}6\ dm$ betragen.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

2.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ auf. Dabei steht h für die Höhe der Pyramide in dm und $V(h)$ für das Volumen der Pyramide in dm^3.
[Mögliches Ergebnis: $V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$] **(4BE)**

Hauptbedingung:

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V(a,h) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

Nebenbedingung:

$$\begin{array}{llcll}
\text{(I)} & h^2 + x^2 & = & 1^2 & \\
\text{(II)} & x^2 + x^2 & = & a^2 & \\
 & 2x^2 & = & a^2 & |:2 \\
 & x^2 & = & \dfrac{a^2}{2} &
\end{array}$$

x^2 in (I):

$$\begin{array}{lcll}
h^2 + \dfrac{a^2}{2} & = & 1^2 & \\
\dfrac{a^2}{2} & = & 1 - h^2 & |\cdot 2 \\
a^2 & = & 2 - 2h^2 &
\end{array}$$

Zielfunktion:

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot (2 - 2h^2) \cdot h \qquad D_V = [0{,}4; 06]$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot (2h - 2h^3)$$

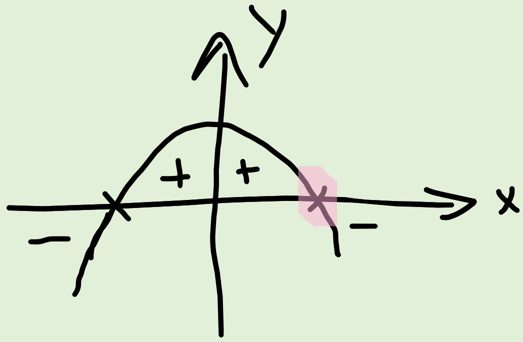
$$V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$$

Zurück zur Aufgabe

2.2 Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe h der Tetra Pak den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie dieses maximale Volumen. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. **(7BE)**

$D_V = [0{,}4; 0{,}6]$

$$
\begin{aligned}
V(h) &= -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h \\
V'(h) &= -2h^2 + \frac{2}{3} \\
-2h^2 + \frac{2}{3} &= 0 && \left| -\frac{2}{3} \right. \\
-2h^2 &= -\frac{2}{3} && |:(-2) \\
h^2 &= \frac{1}{3} \\
h_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin D_V \\
h_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58 && \text{(einfach; VZW)}
\end{aligned}
$$



Vorzeichentabelle:

x	$[0{,}4; h_2[$	$h = h_2$	$]h_2; 0{,}6]$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$
G_f	↗	HOP	↘

Probewert: $V'(0{,}5) = -2 \cdot 0{,}5^2 + \frac{2}{3} > 0$

oder statt Probewert: Der Graph von V' ist ein Teil einer nach unten geöffneten Parabel, woraus die Vorzeichentabelle folgt.

→ Der Graph von V hat an der Stelle $h_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ einen absoluten Hochpunkt mit

$$V_{max} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \approx 0{,}26$$

Oder statt Vorzeichentabelle:

Der Graph von V' ist ein Teil einer nach unten geöffneten Parabel. Damit ist G_V im Intervall $[0{,}4; h_2]$ streng monoton steigend (sms) und im Intervall $[h_2; 0{,}6]$ streng monoton fallend (smf).

→ Der Graph von V hat an der Stelle $h_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ einen absoluten Hochpunkt mit

$$V_{max} = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \approx 0{,}26$$

Zurück zur Aufgabe

3. 90% einer Rasenfläche sind vermoost. Das Moos soll mit einem umweltverträglichen Mittel zurückgedrängt werden. Die zeitliche Entwicklung der vom Moos bedeckten Rasenfläche wird näherungsweise mittels der Modellfunktion M mit der Funktionsgleichung $M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beschrieben. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Tagen ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Ausbringung des Mittels. Der jeweilige Funktionswert von M gibt die gesamte mit Moos bedeckte Fläche in m^2 zum Zeitpunkt t an. Bekannt ist, dass zwei Tage nach Ausbringung des Mittels von $400m^2$ und nach neun Tagen nur noch $140m^2$ vermoost sind.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

3.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b. Runden Sie a ganzzahlig und b auf zwei Nachkommastellen. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche. **(5BE)**

$M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$

$M(2) = 400$; $M(9) = 140$;

$$
\begin{array}{llll}
\text{(I)} & a \cdot e^{2 \cdot b} & = & 400 \\
\text{(II)} & a \cdot e^{9 \cdot b} & = & 140 \qquad |: e^{9 \cdot b} \\
 & a & = & \dfrac{140}{e^{9 \cdot b}}
\end{array}
$$

a in (I):

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{140}{e^{9 \cdot b}} \cdot e^{2 \cdot b} & = & 400 & \\
\dfrac{140 \cdot e^{2 \cdot b}}{e^{9 \cdot b}} & = & 400 & \\
140 \cdot e^{-7 \cdot b} & = & 400 & |: 140 \\
e^{-7 \cdot b} & = & \dfrac{20}{7} & |\ln(\quad) \\
-7b & = & \ln\left(\dfrac{20}{7}\right) & |: (-7) \\
b & = & \dfrac{\ln\left(\frac{20}{7}\right)}{-7} & \\
b & \approx & -0{,}15 &
\end{array}
$$

b in a:

$$a = \frac{140}{e^{9 \cdot b}} \approx 540$$

Potenzgesetz:

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

z.B.:

$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

$\frac{3^2}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

Dazu:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Anschaulich: $\frac{3^2}{3^6} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^4}$

Es gilt aber auch: $\frac{3^2}{3^6} = 3^{2-6} = 3^{-4}$

Also gilt: $\frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

Maßzahl des Flächeninhalts der Rasenfläche:

$a = 540\ [m^2]$ ist der Anfangswert und beschreibt den Flächeninhalt der vermoosten Fläche zu Beginn. Der Flächeninhalthalt a beschreibt laut Angabe 90% des gesamten Flächeninhalts:

$$
\begin{array}{rcl}
90\% & \triangleq & 540 \\
100\% & \triangleq & \dfrac{540}{90} \cdot 100 \\
100\% & \triangleq & 600\ [m^2]
\end{array}
$$

Zurück zur Aufgabe

Zurück zum Inhaltverzeichnis

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $a = 540$; $b = -0{,}15$;

3.2 Der Hersteller des umweltverträglichen Mittels wirbt damit, dass die mit Moos bedeckte Fläche nach der Ausbringung innerhalb einer Woche um ca. 65% zurückgehen wird. Überprüfen Sie diese Werbeaussage, indem Sie berechnen, nach wie vielen Tagen diese Reduzierung laut dem Modell aus 3.0 erreicht wird. Runden Sie auf ganze Tage. **(5BE)**

Da die Moosfläche um 65% abnimmt, muss nach dieser Zeit noch 35% der Fläche bedeckt sein.

$$\begin{aligned}
M(t) &= 540 \cdot e^{-0{,}15\cdot t} && \\
0{,}35 \cdot 540 &= 540 \cdot e^{-0{,}15\cdot t} && |:540 \\
0{,}35 &= e^{-0{,}15\cdot t} && |\ln(\quad) \\
\ln(0{,}35) &= -0{,}15 \cdot t && |:(-0{,}15) \\
t &= \frac{\ln(0{,}35)}{-0{,}15} && \\
t &\approx 7 &&
\end{aligned}$$

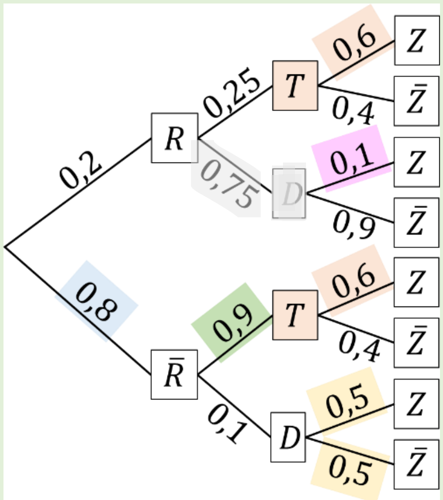
Antwort: Nach dem Modell von 3.0 trifft die Werbeaussage zu.

Zurück zur Aufgabe

Teil 2: mit Hilfsmitteln – Stochastik I: **Lösung**

1. Der Betreiber eines Freizeitparks befragt eine große Anzahl seiner Besucher. Dabei interessiert ihn, ob diese aus der Region (R) kommen, ob es sich entweder um Tageskarteninhaber (T) oder Dauerkarteninhaber (D) handelt und ob sie mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot (Z), wie z.B. das 4D-Kino, in Anspruch nehmen.
Bei 80% der Befragten handelt es sich um Besucher, die nicht aus der Region stammen. Drei Viertel der Befragten aus der Region besitzen eine Dauerkarte. Nicht aus der Region stammende Befragte betreten den Park zu 90% mit einer Tageskarte. Unabhängig davon, ob Befragte mit Tageskarte aus der Region kommen oder nicht, nehmen sie zu 60% mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot in Anspruch. Unter den Befragten mit Dauerkarte aus der Region nutzen nur 10% mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot. Der Anteil der Befragten, die nicht aus der Region kommen, eine Dauerkarte kaufen und mindestens ein kostenpflichtiges Zusatzangebot nutzen, beträgt 4%.
Das Ergebnis der Befragung eines zufällig ausgewählten Besuchers wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. **(6BE)** [Teilergebnis: $P(\{(\bar{R}; D; Z)\}) = 0{,}04$]



$P(\bar{R}DZ) = 0{,}04$ (vgl. Angabe)

$\rightarrow 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot x = 0{,}04$

$\rightarrow x = \frac{0{,}04}{0{,}8 \cdot 0{,}1} = 0{,}5$

ω	RTZ	$RT\bar{Z}$	RDZ	$RD\bar{Z}$	$\bar{R}TZ$	$\bar{R}T\bar{Z}$	$\bar{R}DZ$	$\bar{R}D\bar{Z}$
$P(\omega)$	0,03	0,02	0,015	0,135	0,432	0,288	0,04	0,04

Zurück zur Aufgabe

1.2 Gegeben sind die folgenden Ereignisse: **(7BE)**

E_1: „Ein zufällig ausgewählter Besucher kommt aus der Region oder besitzt eine Tageskarte.“

$E_2 = \{(R;T;Z);(R;D;Z);(\bar{R};T;Z);(\bar{R};D;Z)\}$; $E_3 = \overline{E_1 \cup E_2}$;

a) Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

Wir betrachten dazu die Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse:

ω	RTZ	$RT\bar{Z}$	RDZ	$RD\bar{Z}$	$\bar{R}TZ$	$\bar{R}T\bar{Z}$	$\bar{R}DZ$	$\bar{R}D\bar{Z}$
$P(\omega)$	0,03	0,02	0,015	0,135	0,432	0,288	0,04	0,04

$E_1 = \{(RTZ);(RT\bar{Z});(RDZ);(RD\bar{Z});(\bar{R}TZ);(\bar{R}T\bar{Z})\}$

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= 0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}015 + 0{,}135 + 0{,}432 + 0{,}288 \\
&= 0{,}92 \\
P(E_2) &= 0{,}03 + 0{,}015 + 0{,}432 + 0{,}04 \\
&= 0{,}517 \\
P(E_1)\cdot P(E_2) &= 0{,}92 \cdot 0{,}517 \\
&= 0{,}47564 \\
P(E_1 \cap E_2) &= P(\{(RTZ);(RDZ);(\bar{R}TZ)\}) \\
&= 0{,}03 + 0{,}015 + 0{,}432 \\
&= 0{,}477 \\
\rightarrow P(E_1)\cdot P(E_2) &\neq P(E_1 \cap E_2)
\end{aligned}$$

→ Die Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig.

Zurück zur Aufgabe

b) Fassen Sie E_3 im Sachzusammenhang möglichst einfach in Worte.

$E_3 = \overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$

$$\begin{aligned}
\overline{E_1} &= \{(\bar{R}DZ);(\bar{R}D\bar{Z})\} \\
\overline{E_2} &= \{(RT\bar{Z});(RD\bar{Z});(\bar{R}T\bar{Z});(\bar{R}D\bar{Z})\} \\
\overline{E_1} \cap \overline{E_2} &= \{(\bar{R}D\bar{Z})\}
\end{aligned}$$

E_3:“Ein zufällig ausgewählter Besucher kommt nicht aus der Region, ist Dauerkartenbesitzer und bucht kein Zusatzangebot.“

Zurück zur Aufgabe

2. Dem Freizeitpark ist ein Campingplatz angegliedert, auf dem die Parkbesucher übernachten können. Nach Angaben des Betreibers nutzen 15% aller Parkbesucher diese Übernachtungsmöglichkeit (C). 60% aller Besucher kommen in den Schulferien (F) in den Freizeitpark. Von diesen nutzen 20% das Übernachtungsangebot.

2.1 Ermitteln Sie unter Verwendung einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Parkbesucher den Park außerhalb der Ferien besucht und die angegliederte Übernachtungsmöglichkeit in Anspruch nimmt. **(4BE)**

	C	$\bar{C}$	
F	$0{,}60 \cdot 0{,}20 = 0{,}12$	$0{,}48$	$0{,}60$
$\bar{F}$	$0{,}03$	$0{,}37$	$0{,}40$
	$0{,}15$	$0{,}85$	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$P(C \cap \bar{F}) = 0{,}03$

Zurück zur Aufgabe

2.2 An einem bestimmten Tag besuchen 200 $Familien\ den\ Park$. Insgesamt stehen 50 Campingstellplätze zur Verfügung. Eine Familie benötigt jeweils genau einen Stellplatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie auf dem Campingplatz übernachten möchte, beträgt erfahrungsgemäß 25%. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) die Anzahl der Campingstellplätze an diesem Tag nicht ausreicht.

$n = 200; p = 0{,}25;$

X:"Anzahl an Familien, die auf dem Campingplatz übernachten möchten von 200."

$$\begin{aligned} P_{0,25}^{200}(X > 50) &= 1 - P_{0,25}^{200}(X \le 50) = 1 - \sum_{i=0}^{50} \binom{200}{i} \cdot 0{,}25^i \cdot 0{,}75^{200-i} \\ &\overset{TW}{=} 1 - 0{,}53791 \\ &= 0{,}46209 \end{aligned}$$

k	$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$
48	0,06247	0,40828
49	0,06460	0,47288
50	0,06503	0,53791
51	0,06375	0,60166
52	0,06089	0,66255

Zurück zur Aufgabe

b) die Anzahl benötigten Campingstellplätze innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

$$\begin{aligned} E(X) &= n \cdot p = 200 \cdot 0{,}25 = 50 \\ Var(X) &= n \cdot p \cdot (1-p) = 200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 37{,}5 \\ \sigma(X) &= \sqrt{37{,}5} \approx 6{,}124 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P(E(X) - \sigma(X) < X < E(X) + \sigma(X)) \\ =\ & P(50 - 6{,}124 < X < 50 + 6{,}124) \\ =\ & P(43{,}876 < X < 56{,}124) \\ =\ & P(44 \le X \le 56) \\ =\ & P_{0,25}^{200}(X \le 56) - P_{0,25}^{200}(X \le 43) \\ =\ & 0{,}85546 - 0{,}14376 \\ =\ & 0{,}71170 \end{aligned}$$

k	$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$
43	0,03487	0,14376
44	0,04148	0,18524
45	0,04793	0,23317
46	0,05384	0,28700
47	0,05880	0,34580
48	0,06247	0,40828
49	0,06460	0,47288

Zurück zur Aufgabe

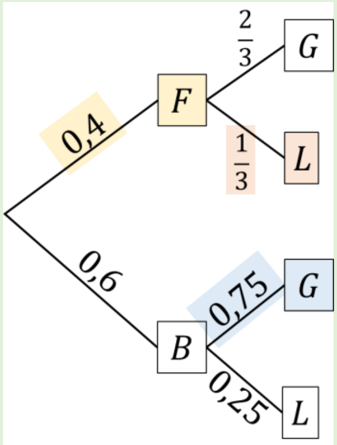
Zurück zum Inhaltverzeichnis

Teil 2: mit Hilfsmitteln – Stochastik II: **Lösung**

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1. Ein Schreiner hat sich auf die Herstellung maßangefertigter Möbel spezialisiert. Er fertigt seine Möbel aus Fichten- oder Buchenholz und bietet sie mit gewachster (G) oder lackierter (L) Oberfläche an.
Erfahrungsgemäß entscheiden sich 40% seiner Kunden für Möbel aus Fichtenholz (F). Jeder dritte Kunde, der Möbel aus Fichtenholz in Auftrag gibt, bestellt diese mit lackierter Oberfläche. Unter den Kunden, die sich für die Holzart Buche (B) entscheiden, beträgt der Anteil derer, die ihre Möbel mit gewachster Oberfläche bestellen, 75%.

1.1 Berechnen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil von gewachsten Möbeln am Verkauf. **(4BE)**



$$
\begin{aligned}
P(G) &= P(F \cap G) + P(B \cap G) \\
&= P_F(G) \cdot P(F) + P_B(G) \cdot P(B) \\
&= \frac{2}{3} \cdot 0{,}4 + 0{,}75 \cdot 0{,}6 \\
&\approx 0{,}717
\end{aligned}
$$

Der Anteil von gewachsten Möbeln beträgt circa 71,7%.

Zurück zur Aufgabe

1.2 Berechnen Sie $P(B \cup G)$. **(2BE)**

$$
\begin{aligned}
P(B \cup G) &= 1 - P(\overline{B \cup G}) \\
&= 1 - P(\bar{B} \cap \bar{G}) \\
&= 1 - P(F \cap L) \\
&= 1 - 0{,}4 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{13}{15} \\
&= 0{,}8\overline{6}
\end{aligned}
$$

Zurück zur Aufgabe

2. Für eine Zufallsgröße X ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $a, b \in \mathbb{R}$ durch folgende Tabelle vollständig gegeben:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	a	$b - a$	0,2	b	0,08	0,02

2.1 Bestimmen Sie die Werte für die Parameter a und b, wenn $E(X) = 3{,}12$ gilt.
[Teilergebnis: $a = 0{,}1$] **(4BE)**

$$\begin{aligned} a + b - a + 0{,}2 + b + 0{,}08 + 0{,}02 &= 1 \\ 2b + 0{,}3 &= 1 \qquad |-0{,}3 \\ 2b &= 0{,}7 \qquad |:2 \\ b &= 0{,}35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot a + 2 \cdot (0{,}35 - a) + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot b + 5 \cdot 0{,}08 + 6 \cdot 0{,}02 \\ 3{,}12 &= a + 0{,}7 - 2a + 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}35 + 0{,}4 + 0{,}12 \\ 3{,}12 &= -a + 3{,}22 \qquad |-3{,}22 \\ -0{,}1 &= -a \qquad |\cdot(-1) \\ a &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

2.2 Die Lieferzeiten für die Möbel des Schreiners aus 1.0 sind abhängig von verschiedenen Faktoren, wie z.B. Auftragslage und Bestellumfang. Der Schreiner hat sich über Jahre hinweg die Lieferzeiten ab Auftragseingang notiert, um möglichst genaue Angaben zu den Lieferzeiten machen zu können. Die unter 2.0 aufgeführte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den unter 2.1 bestimmten Werten für a und b beschreibt die Lieferzeiten für die Möbel innerhalb der letzten Jahre. Die Zufallsgröße X gibt die Lieferzeiten ab Bestelldatum in vollen Wochen an. Lieferzeiten von mehr als sechs Wochen kamen bisher nicht vor.
Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im Sachzusammenhang und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: **(6BE)**

E_1: „Die Lieferzeit beträgt höchstens vier Wochen."

E_2: „Bei genau drei von neun Bestellungen erfolgt die Lieferung der Möbel innerhalb einer Woche."

E_3: „Bei zehn nacheinander eingegangenen Bestellungen erfolgt nur bei der letzten die Lieferung der Möbel erst in der sechsten Woche, alle anderen erfolgen früher."

Der Erwartungswert von X beschreibt die durchschnittliche Lieferzeit in Wochen.

$$\begin{aligned} P(E_1) &= 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}35 \\ P(E_1) &= 0{,}9 \\ P(E_2) &= \binom{9}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^6 \\ P(E_2) &= 0{,}04464 \\ P(E_3) &= 0{,}98^9 \cdot 0{,}02 \\ P(E_3) &\approx 0{,}01667 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

3. Gegen eine Gebühr liefert der Schreiner die gekauften Möbel an seine Kunden aus. Von insgesamt 200 Kunden stammen 80 aus einem Umkreis von $50km$ (U) um den Standort der Schreinerei. 128 Kunden nehmen den Lieferservice nicht in Anspruch $\overline{L}$.
Um die Auslieferungen besser planen zu können, hat der Schreiner in der folgenden Tabelle die Anzahl der zu beliefernden Kunden (L) – also insgesamt 72 – je nach Bestellumfang und Lieferort dargestellt.

	U	$\overline{U}$
$\leq$ 2 Möbelstücke	7	17
$>$ 2 Möbelstücke	18	30

3.1 Ergänzen Sie die nebenstehende Vierfeldertafel mithilfe der obigen Angaben. Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mehr als 50 km von der Schreinerei entfernt wohnt und seine Möbel selbst abholt. **(4BE)**

	U	$\overline{U}$	Σ
L	25	47	72
$\overline{L}$	55	73	128
Σ	80	120	200

$$P(\overline{U} \cap \overline{L}) = \frac{73}{200} = 0{,}365$$

Zurück zur Aufgabe

3.2 Beschreiben Sie mit eigenen Worten jeweils die Bedeutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_U(\overline{L})$ bzw. $P_{\overline{U}}(\overline{L})$ in Sachzusammenhang (ohne sie zu berechnen) und interpretieren Sie die hier geltende Beziehung $P_U(\overline{L}) > P_{\overline{U}}(\overline{L})$ im Sinne der vorliegenden Thematik. **(3BE)**

$P_U(\overline{L})$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der aus einem Umkreis von $50km$ stammt, seine Möbel selbst abholt.

$P_{\overline{U}}(\overline{L})$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde, der nicht aus einem Umkreis von $50km$ stammt, seine Möbel selbst abholt.

$P_U(\overline{L}) > P_{\overline{U}}(\overline{L})$: Die Wahrscheinlichkeit für eine Selbstabholung ist höher, wenn ein Kunde in einem Umkreis von $50km$ stammt.

Zurück zur Aufgabe