



# Arbeitsblatt: Quadratische Ergänzung

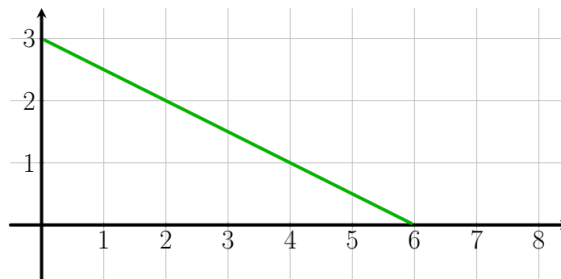
**Zusammenfassen:** Wende eine binomische Formel an und fasse anschließend zusammen.



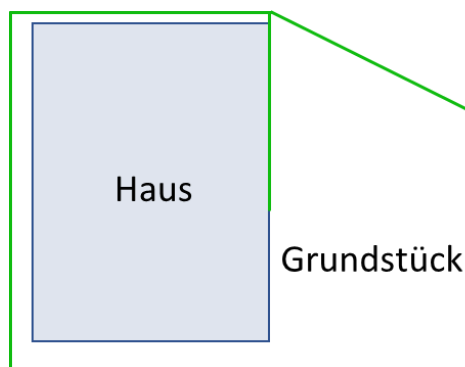
Entscheide, für welchen Wert von  $x$  der Term einen Extremwert erhält und gib diesen Wert an. Gib begründet an, ob es sich um einen Maximalwert oder einen Minimalwert handelt.



Zeichne die korrekte Fläche in das Bild, um Karl Friedrich eine entsprechende Lösung zu präsentieren.



**Aufgabe 2:** Überlege dir bessere Orte, als den von Carl Friedrich gewählten, für flächeninhaltsgleiche Beete.



## Infomaterial: Quadratische Ergänzung

Bei der quadratischen Ergänzung geht es darum, einen quadratischen Term so umzuwandeln, dass man seinen höchsten oder geringsten Wert bestimmen kann.

$$\text{Beispiel: } T(x) = -0,25x^2 + 2x + 1$$

Setzt man bei diesem Term für  $x$  bestimmte Werte ein, dann erhält man davon abhängig entsprechende  $y$ -Werte.

$$\text{Für } x = -2 \text{ erhält man beispielsweise } T(-2) = -0,25 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 = -4.$$

$$\text{Für } x = 1 \text{ erhält man } T(1) = -0,25 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2,75.$$

$$\text{Für } x = 10 \text{ erhält man } T(8) = -0,25 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 1 = 1.$$

Um nun bestimmen zu können für welche  $x$ -Wert der Termwert maximal wird, also für welchen  $x$ -Wert der größte  $y$ -Wert entsteht, kann man wie folgt vorgehen.

**Schritt 1:** Klammere den Leitkoeffizienten aus.

$$T(x) = -0,25x^2 + 2x + 1$$

$$T(x) = -0,25(x^2 - 8x - 4)$$

(**Hinweis:** Klammert man einen Wert aus, dann kann man den entsprechenden Summanden durch diesen Wert teilen. Z.B.  $2x: (-0,25) = -8x$  und deswegen ergibt das Ausklammern von  $-0,25$  an dieser Stelle  $-8x$ . Multipliziert man wieder aus, dann erkennt man, dass wieder das Ursprüngliche herauskommt.)

**Schritt 2:** Zerlege den Koeffizienten vor  $x$  so, dass ein Produkt mit dem Faktor 2 entsteht.

(„Rechne 2 Mal Koeffizient durch 2“)

$$T(x) = -0,25(x^2 - 8x - 4)$$

$$T(x) = -0,25(x^2 - 2 \cdot 4x - 4)$$

(**Hinweis:** Das macht man, da man später eine der binomischen Formeln –  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$  – anwenden möchte)

**Schritt 3:** Führe die quadratische Ergänzung durch.

(**Hinweis:** Mit der quadratischen Ergänzung ist nun gemeint, dass man diesen Ausdruck noch dazu addiert, der nötig ist, um die Komponenten einer der binomischen Formeln zu erhalten. Da man einen Ausdruck nicht einfach ohne weiteres dazu addieren kann, muss ihn anschließend auch wieder abziehen.)

$$T(x) = -0,25(x^2 - 2 \cdot 4x - 4)$$

$$T(x) = -0,25(x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2 - 4) \text{ (Anwenden der binomischen Formel)}$$

$$T(x) = -0,25((x - 4)^2 - 4^2 - 4)$$

$$T(x) = -0,25((x - 4)^2 - 20)$$

**Zusammenfassen:** Fasse zusammen und finde den Maximalwert.

(**Hinweis:** Nun kann die äußere Klammer noch aufgelöst werden)

$$T(x) = -0,25((x - 4)^2 - 20)$$

$$T(x) = -0,25(x - 4)^2 + 5$$

Da der Ausdruck  $(x - 4)^2$  immer größer oder gleich 0 ist, ist der Grenzwert – der kleinste Wert, der hier herauskommen kann – die 0. Diesen Wert erhält man für  $x = 4$ . Deswegen erhält man den Maximalwert für den Term bei  $x = 4$ . Der Maximalwert ergibt dann eingesetzt genau die additive Konstante.  $\rightarrow T_{max} = T(4) = -0,25(4 - 4)^2 + 5 = 5$ .