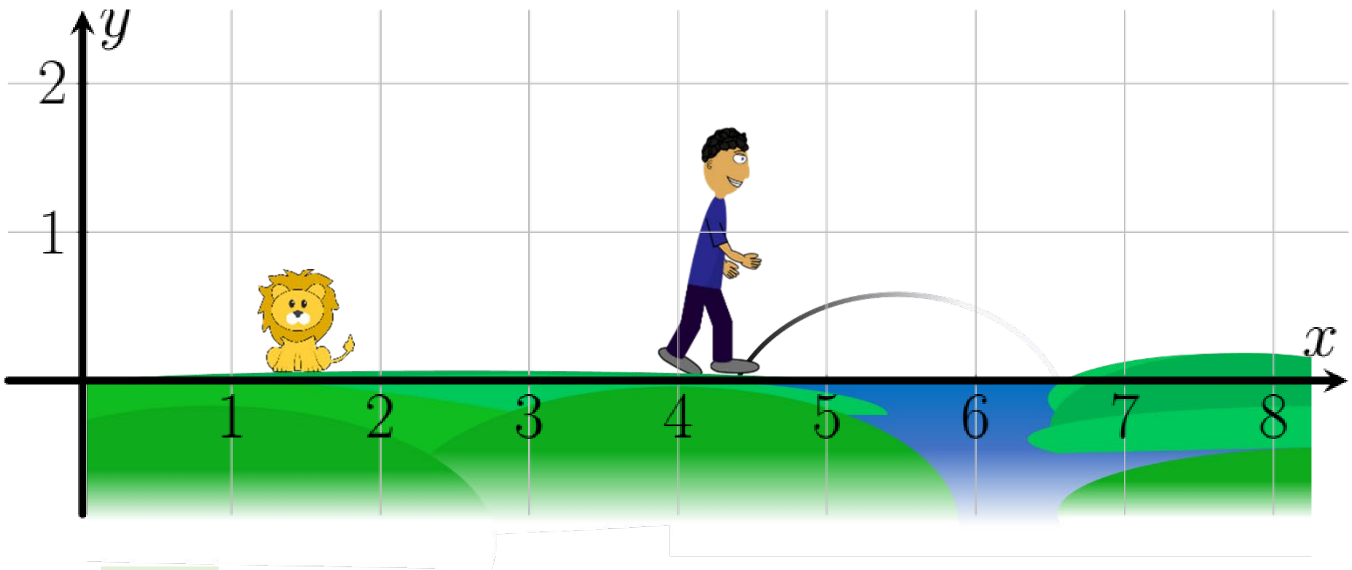
Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel)

Oh nein! Wir beobachten, wie Carl Friedrich von einem Löwen verfolgt wird. Vor ihm sieht er einen Flussübergang. Zum Glück ist der Löwe noch recht klein, so dass er nicht so weit wie Carl springen kann. Carl setzt also an und will springen. Wenn Carl im Fluss landet, dann wird er vielleicht abgetrieben und geht uns verloren.
Entscheide mithilfe der untenstehenden Informationen, ob Carl springen soll und formuliere einen Satz, den du ihm zurufen möchtest. Gib ihm auch eine mathematische Begründung, um ihn zu überzeugen.



Aufgabe:
Das andere Flussufer liegt von der Absprungstelle genau 1,95 Meter entfernt. Die Flugbahn von Carl Friedrich kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x - 14{,}625$ (x und y in Metern) beschrieben werden, wobei durch die Nullstellen der Funktion der Absprung- und Landeort identifiziert werden kann.

a) Sieh dir das Lernvideo (leicht) an oder lies dir das Infoblatt (anspruchsvoll) zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen durch.

b) Gib den Ansatz an, um die Nullstellen der obigen Funktion zu bestimmen.

c) Gib die allgemeine Form der Lösungsformel für quadratische Gleichungen an.

d) Gib die Formel für die Diskriminante D an.

e) Bestimme jetzt die Nullstellen der Funktion.

Arbeitsblatt: Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel, abc-Formel)

f) Vergleiche deine Ergebnisse mit deinem Banknachbarn. Schreibt auf, was ihr Carl zurufen würdet. Gebt Carl dabei auch eine mathematisch saubere Begründung an, um ihn zu überzeugen.

g) Löse die folgenden quadratischen Gleichungen, falls möglich. Hier nochmal das Video:

i) $2x^2 - 4x - 6 = 0$

Diskriminante $D =$

→ Die Anzahl an Lösungen beträgt

Berechnung der Lösung:

ii) $3x^2 + 12x + 12 = 0$

Diskriminante $D =$

→ Die Anzahl an Lösungen beträgt

Berechnung der Lösung:

iii) $3x^2 - 4x + 5 = 0$

Diskriminante $D =$

→ Die Anzahl an Lösungen beträgt

Berechnung der Lösung:

Informationsblatt: Lösen quadratischer Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R}$) können nicht durch so einfache Umformungen, wie bei linearen Gleichungen, nach x aufgelöst werden. Von daher hat es sich angeboten obige Gleichung allgemein nach x aufzulösen und das Endergebnis als Formel anzugeben. Diese dabei entstande Formel lautet die „Lösungsformel für quadratische Gleichungen“:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Die x-Werte, die dabei bestimmt werden, sind genau die Lösungen, die eingesetzt in der gegebenen Gleichung für eine wahre Aussage sorgen. Die Gleichung wird mithilfe der quadratischen Ergänzung gelöst. Die Herleitung der Formel kannst du dir am Ende des Informationsblattes anschauen.
Die Platzhalter a, b und c stehen für Zahlen, die in einer konkreten Aufgabenstellung eingesetzt werden können. Wir schauen uns als Beispiel die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ an, die wir lösen möchten.

$2x^2 + 6x - 8 = 0$
Hier identifizieren wir

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$

Das $\pm$ bei der Formel drückt aus, dass es zwei Lösungen für die Gleichung gibt. Man schreibt einmal den Bruch nur mit dem „–“ (Minuszeichen) und berechnet den Endwert und macht das Gleiche dann mit „+“ eingesetzt:

$x_1 = \frac{-6-10}{4} = -4; \qquad x_2 = \frac{-6+10}{4} = 1;$

Macht man nun die Probe und setzt jeweils -4 oder 1 in die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$ ein, dann erkennt man, dass genau diese Werte eine Lösung der Gleichung sind.
Im allgemeinen wird der Ausdruck unter der Wurzel die sogenannte Diskriminante D genannt. Man schreibt die Lösungsformel für quadratische Gleichungen dann folgendermaßen auf:

$D = b^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Der Grund für diese Art der Darstellung liegt darin, dass Abhängig von dem Wert unter der Wurzel ersichtlich wird ob die betrachtete Gleichung zwei, eine oder keine Lösung besitzen.

Beispiel:
$4x^2 - 8x + 4 = 0$
$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 - 64 = 0 \rightarrow$ eine Lösungen

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{+8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = 1$

Da hier unter der Wurzel 0 steht, sind die beiden Lösungen die entstehen identisch, man hat also nur eine Lösung.

Steht unter der Wurzel ein negativer Wert, dann hat die entsprechende Gleichung keine Lösung.
Beispiel: $3x^2 - 4x + 2 = 0$; $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 \rightarrow$ keine Lösung
Es gilt also für $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R}$):

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$ (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)

Für $D > 0$: zwei Lösungen; Für $D = 0$: eine Lösung; Für $D < 0$: keine Lösung;

Herleitung der „Lösungsformel für quadratische Gleichungen“

Links ist das Lösen eines konkreten Beispiels. Auf der rechten Seite ist die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$0 = 2x^2 + 6x - 8$		$0 = ax^2 + bx + c$	
1. Ausklammern			
$0 = 2(x^2 + 3x - 4)$		$0 = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$	
2. Zerlege den Koeffizienten von x, um den $2ab$-Teil einer binomischen Formel zu erzeugen.			
$0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1{,}5x - 4)$		$0 = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a})$	
3. Führe die quadratische Ergänzung durch.			
$0 = 2(x^2 + 2 \cdot 1{,}5x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 4)$		$0 = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a})$	
$0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 - 4)$		$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$	
$0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 6{,}25)$		$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$	
Nun hat man den Term so umgeformt, dass in der kompletten Gleichung nur noch ein x steht und kann nach diesem auflösen.			
$0 = 2((x + 1{,}5)^2 - 6{,}25)$	$\vert : 2$	$0 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}\right)$	$\vert : a$
$0 = (x + 1{,}5)^2 - 6{,}25$	$\vert +1{,}562$	$0 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$	$\vert + \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$
$6{,}25 = (x + 1{,}5)^2$	$\sqrt{}$	$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$\sqrt{}$
$\pm 2{,}5 = x + 1{,}5$	$\vert -0{,}75$	$\pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a}$	$\vert + \frac{b}{2a}$
$x_{1,2} = -1{,}5 \pm 2{,}5$		$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	
Die Formel kann man nun noch umformen, da $\sqrt{4a^2} = 2a$ gilt		$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	