Inhaltsverzeichnis

Analysis Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil A)

1.

a) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an. **(2BE)**

Lösung S.23 Lösungsvideo

b) Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$. **(3BE)**

Lösung S.23 Lösungsvideo

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

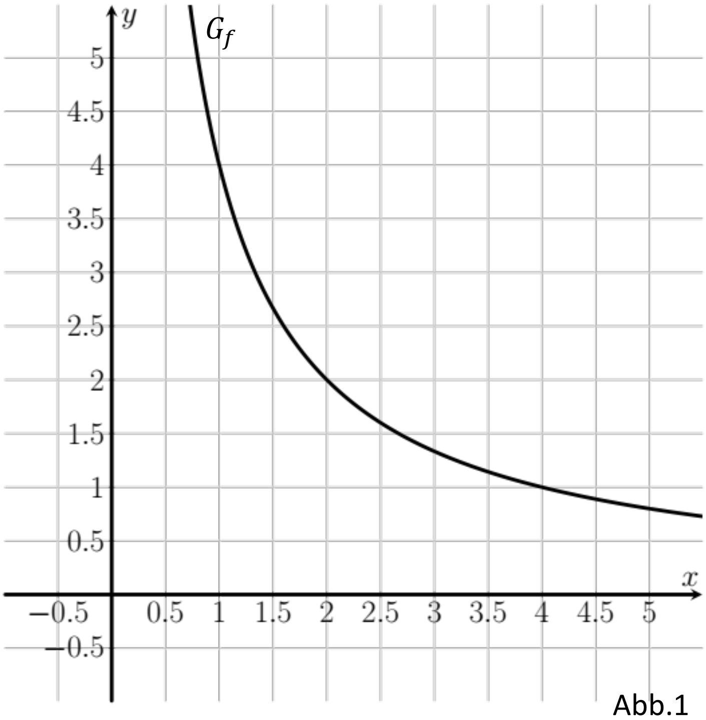


Abb.1

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x)\,dx$. **(2BE)**

Lösung S.24 Lösungsvideo

b) Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1; 4]$ überein. **(3BE)**

Lösung S.25 Lösungsvideo

3. Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).
Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f\big(f(x)\big)$.

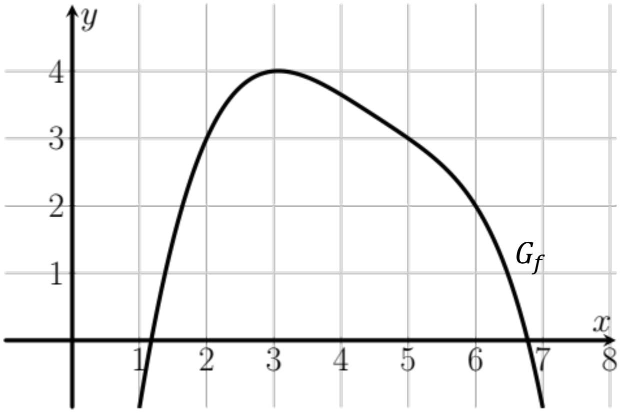


Abb.2

a) Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an. **(2BE)**

Lösung S.26 Lösungsvideo

b) Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt. **(3BE)** Lösung S.26 Lösungsvideo

4. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt. **(1BE)** Lösung S.26 Lösungsvideo

b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet dessen, x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist. **(4BE)**

Lösung S.27 Lösungsvideo

$\sum 20$

Analysis Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil A)

1. Gegeben ist die Funktion $g: \mapsto \frac{2x^2}{x^2-9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

a) Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an. **(2BE)**

Lösung S.28 Lösungsvideo

b) Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt. **(3BE)**

Lösung S.29 Lösungsvideo

2. Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F.

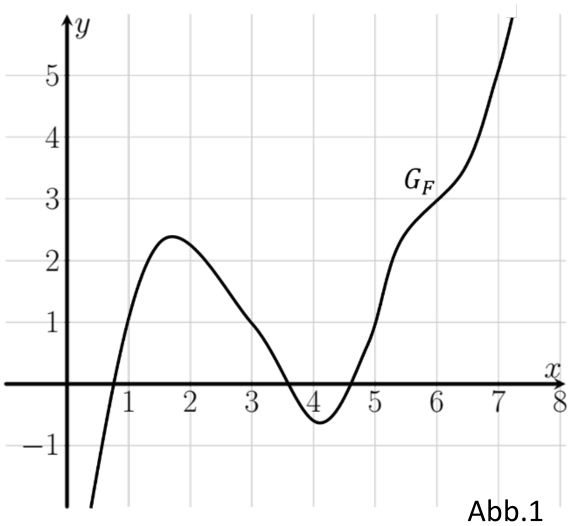


Abb.1

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,dx$. **(2BE)**

Lösung S.30 Lösungsvideo

b) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie ihr Vorgehen in Abbildung 1. **(3BE)**

Lösung S.30 Lösungsvideo

3.

a) Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(2x-3)$ mit Definitionsmenge $D_h =]\frac{3}{2}; +\infty[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an. **(2BE)**

Lösung S.31 | Lösungsvideo

b) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.
Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt. **(3BE)**

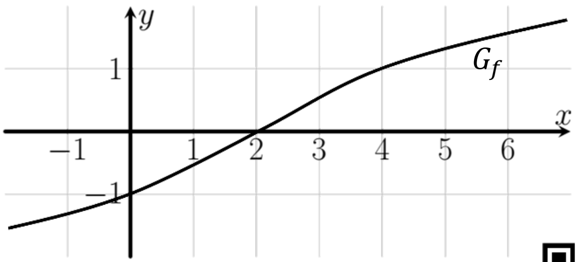


Abb.2

Lösung S.32 | Lösungsvideo

4. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt. **(1BE)**

Lösung S.26 gleiche Aufgabe wie 4a Gruppe 1 | Lösungsvideo

b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist. **(4BE)**

Lösung S.27 gleiche Aufgabe wie 4b Gruppe 1 | Lösungsvideo

$\sum 20$

Stochastik Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil A)

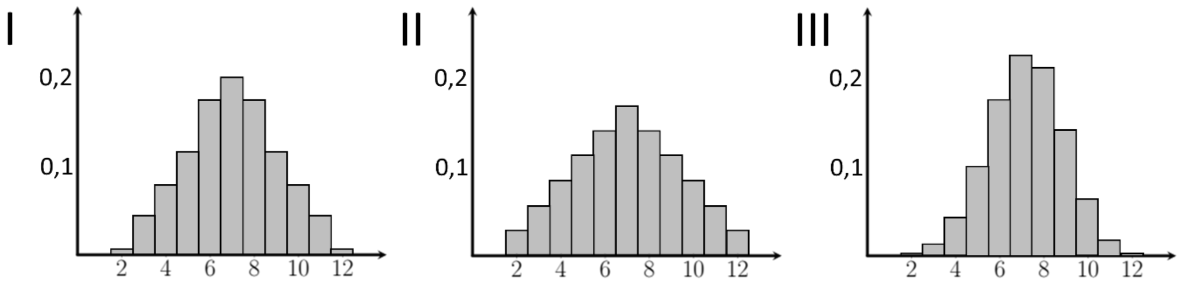
Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=10)$ übereinstimmt. **(2BE)**

Lösung S.33 Lösungsvideo

b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. **(3BE)**

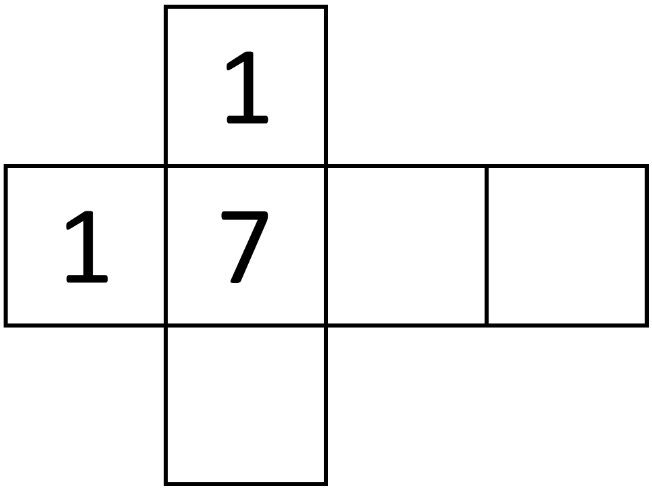


Lösung S.34 Lösungsvideo

$\sum 5$

Stochastik Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil A)

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



a) Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird. **(2BE)**

Lösung S.35 Lösungsvideo

b) Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt. **(3BE)**

Lösung S.36 Lösungsvideo

$\sum 5$

Zurück zum Inhaltverzeichnis

Geometrie Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil A)

Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(3|-6|5)$ und Radius $2\sqrt{6}$.

a) Geben Sie eine Gleichung von K in Koordinatenform an und zeigen Sie, dass der Punkt $P(5|-4|1)$ auf K liegt. **(3BE)**

Lösung S.25 Lösungsvideo

b) Untersuchen Sie, ob K die x_1x_2 −Ebene schneidet. **(2BE)**

Lösung S.26 Lösungsvideo

$\sum 5$

Geometrie Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil A)

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. **(3BE)**

Lösung S.27 Lösungsvideo

b) Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q.
Bestimmen Sie die Koordinaten von R. **(2BE)**

Lösung S.27 Lösungsvideo

$\sum 5$

Zurück zum Inhaltverzeichnis

Analysis Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil B)

Gegeben ist die in $[0;10]$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto 2\cdot\sqrt{10x-x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f. **(2BE)**
(zur Kontrolle: 0 und 10)

Lösung S.30 | Lösungsvideo

b) Der Graph G_f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt. **(5BE)**
(*zur Kontrolle:* $f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$; y − Koordinate des Hochpunkts: 10)

Lösung S.31 | Lösungsvideo

c) Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f. Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f' zu berechnen. **(3BE)**

I $f''(x) = \frac{50}{(x^2-10x)\cdot\sqrt{10x-x^2}}$ II $f''(x) = \frac{50}{(10x-x^2)\cdot\sqrt{10x-x^2}}$

Lösung S.32 | Lösungsvideo

d) Weisen Sie nach, dass für $0 \leq x \leq 5$ die Gleichung $f(5-x) = f(5+x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5-x)$ und $f(5+x)$ geeignet umformen. **(5BE)**

Lösung S.32 | Lösungsvideo

e) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$ an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. **(4BE)**

Lösung S.33 | Lösungsvideo

f) Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein. **(4BE)**

Lösung S.34 | Lösungsvideo

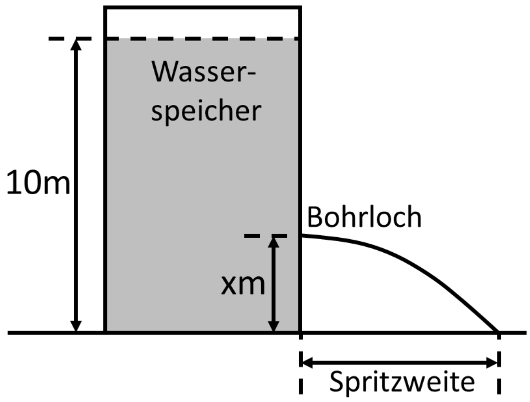
g) Betrachtet wird die Tangente an G_f im Punkt $(2|f(2))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet. **(2BE)**

Lösung S.35 | Lösungsvideo

h) Von den Eckpunkten des Rechtecks ABCD liegen der Punkt $A(s|0)$ mit $s \in]0;5[$ sowie der Punkt B auf der x-Achse, die Punkte C und D liegen auf G_f. Das Rechteck besitzt somit die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ als Symmetrieachse. Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen. **(5BE)**

Lösung S.35 | Lösungsvideo

Ein Wasserspeicher hat die Form eines geraden Zylinders und ist bis zu einem Füllstand von 10 m über dem Speicherboden mit Wasser gefüllt. Bohrt man unterhalb des Füllstands ein Loch in die Wand des Wasserspeichers, so tritt unmittelbar nach Fertigstellung der Bohrung Wasser aus, das in einer bestimmten Entfernung zur Speicherwand auf den Boden trifft. Diese Entfernung wird im Folgenden Spritzweite genannt (vgl. Abbildung). Die Abhängigkeit der Spritzweite von der Höhe des Bohrlochs wird durch die in den bisherigen Teilaufgaben betrachtete Funktion f modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Höhe des Bohrlochs über dem Speicherboden in Metern und $f(x)$ die Spritzweite in Metern.



i) Der Graph G_f verläuft durch den Punkt $(3{,}6|9{,}6)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. **(1BE)**

Lösung S.36 Lösungsvideo

j) Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt. Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist. **(5BE)**

Lösung S.36 Lösungsvideo

k) Es wird nun ein bestimmtes Bohrloch im Wasserspeicher betrachtet. Durch das Abfließen verringert sich das Volumen des Wassers im Speicher in Abhängigkeit von der Zeit. Die Funktion $g: t \mapsto 0{,}25t - 25$ mit $0 \leq t \leq 100$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung dieser Volumenänderung. Dabei ist t die seit der Fertigstellung des Bohrlochs vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Speicher in Litern pro Sekunde.
Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt. **(4BE)**

Lösung S.37 Lösungsvideo

$\sum 40$

Analysis Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil B)

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

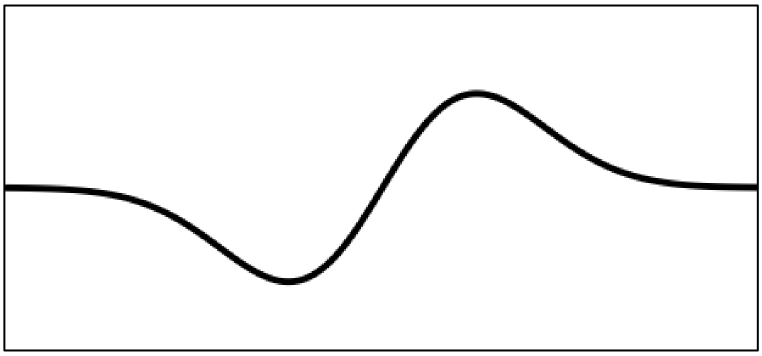


Abb. 1

a) Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an. **(4BE)**

Lösung S.40 Lösungsvideo

b) Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f. **(2BE)**

(zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

Lösung S.41 Lösungsvideo

c) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. **(5BE)**

Lösung S.42 Lösungsvideo

d) Ist g' die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, so gilt bekanntlich $\int_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = \left[e^{g(x)}\right]_u^v$. Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int_0^1 f(x)\, dx$. **(3BE)**

Lösung S.43 Lösungsvideo

e) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:
Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl $w > 2022$ gilt

$$F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x)\, dx.$$ **(3BE)**

Lösung S.43 Lösungsvideo

2. Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$f_a: x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2+\frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt $(1|1)$ enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an. **(3BE)**

Lösung S.44 Lösungsvideo

b) Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an. **(2BE)**

Lösung S.44 Lösungsvideo

c) Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, a_1 und a_2:

- $f_a(0) = 0$
- $f_a'(0) = f_0'(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt. Lösung S.45 Lösungsvideo

d) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:
Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.
Lösung S.46 Lösungsvideo

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:
I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.
II Der Graph hat keine Extrempunkte.
Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

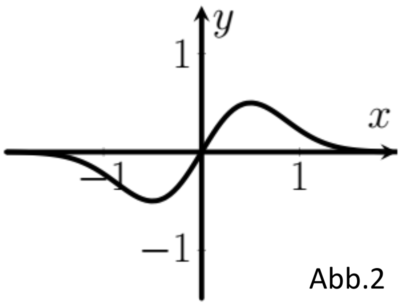


Abb.2

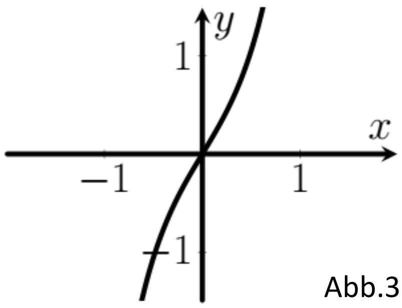


Abb.3

Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

e) Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe. **(3BE)** Lösung S.46 Lösungsvideo

f) Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt. **(3BE)** Lösung S.47 Lösungsvideo

g) Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v|f_a(v))$ des Graphen von f_a, der Punkt $(0|\frac{2}{v})$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v|0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat. **(6BE)** Lösung S.48 Lösungsvideo

$\sum$**40**

Stochastik Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil B)

Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5% der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

1. Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0{,}05$.

a) Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: **(6BE)**

E_1: „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen.“
E_2: „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen.“
E_3: „12 oder 13 Pflanzen bleiben ohne Pflanzenbefall.“

Lösung S.53 | Lösungsvideo

b) Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99% beträgt. **(4BE)**

Lösung S.54 | Lösungsvideo

c) Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. **(4BE)**

Lösung S.55 | Lösungsvideo

d) Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$. **(3BE)**

Lösung S.55 | Lösungsvideo

2. Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen eine nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70% der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.
Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen. Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt."
T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen."

a) Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $x = 13$)

Lösung S.56 Lösungsvideo

b) Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\bar{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann. **(4BE)**

Lösung S.56 Lösungsvideo

$\sum \mathbf{25}$

Stochastik Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil B)

Die SMV eines Gymnasiums initiierte im vergangenen Schuljahr die Aktionen „Baumpatenschaft“ und „Umweltwoche“.

1. Mit einer Umfrage auf dem Schulfest wird der Bekanntheitsgrad der beiden Aktionen ermittelt. Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion „Baumpatenschaft“. 24% der Befragten kennen keine der beiden Aktionen; die Aktion „Umweltwoche“ kennen 30% der Befragten nicht.
Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
B: „Die Person kennt die Aktion ‚Baumpartnerschaft‘.“
U: „Die Person kennt die Aktion ‚Umweltwoche‘.“

a) Weisen Sie nach, dass der Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind. **(4BE)**

Lösung S.57 Lösungsvideo

b) Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpartnerschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt. **(1BE)**

Lösung S.57 Lösungsvideo

2. Um Geld für die beiden Aktionen einzunehmen, bietet die SMV auf dem Schulfest das Spiel „2022“ an. Bei dem Spiel werden zwei Glücksräder mit drei bzw. vier gleich großen Sektoren verwendet, die wie in Abbildung 1 beschriftet sind. Für einen Einsatz von 3€ darf man jedes der beiden Glücksräder einmal drehen. Für jede Ziffer 2, die auf den erzielten Sektoren steht, werden 2€ ausbezahlt. Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft die Ziffer 2 auf den erzielten Sektoren insgesamt vorkommt.

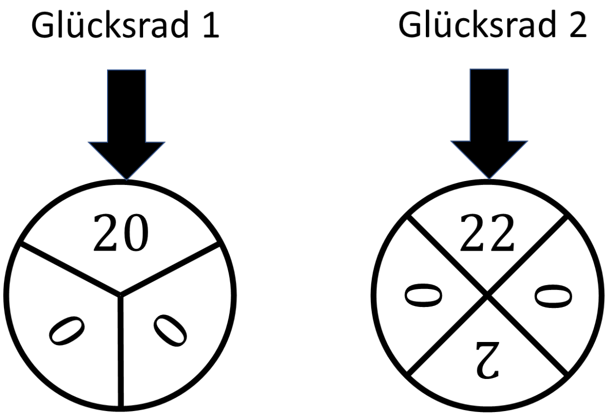


Abb. 1

a) Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2. **(3BE)**

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

(zur Kontrolle: $p_2 = \frac{1}{4}$)

Lösung S.58 Lösungsvideo

Zurück zum Inhaltverzeichnis

b) Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen $300€$ beträgt. **(4BE)**

Lösung S.59 Lösungsvideo

Acht Personen spielen nacheinander jeweils einmal das Spiel „2022“.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindesten $4€$ ausbezahlen muss. **(4BE)**

Lösung S.60 Lösungsvideo

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen drei unterschiedliche Beträge ausbezahlt werden, die in der Summe $12€$ ergeben. **(3BE)**

Lösung S.60 Lösungsvideo

3. Die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 8$ und p_x besitzt die Standardabweichung $\frac{4}{3}$. In Abbildung 2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

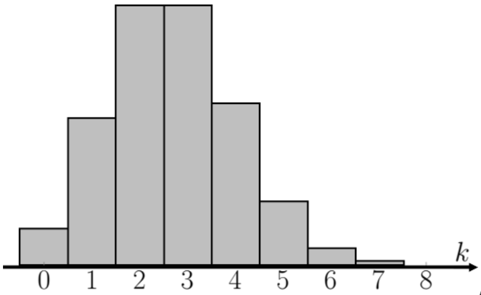


Abb. 2

a) Ermitteln Sie den Wert des Parameters p_x. **(4BE)**

Lösung S.61 Lösungsvideo

b) Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter $n = 8$ und $p_Y = 1 - p_x$. Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt. **(2BE)**

Lösung S.61 Lösungsvideo

$\sum 25$

Geometrie Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil B)

Gegeben sind die Punkte $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$, die in der Ebene E liegen, sowie die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $[PQ]$. Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke $[PQ]$ Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist. **(4BE)** *(zur Kontrolle: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)*

Lösung S.67 | Lösungsvideo

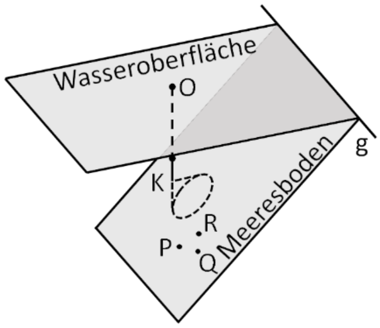
b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt. **(5BE)** *(zur Kontrolle: $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)*

Lösung S.68 | Lösungsvideo

c) Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2-Ebene liegt. **(1BE)**

Lösung S.69 | Lösungsvideo

In einem Modell für einen Küstenabschnitt am Meer beschreibt die x_1x_2-Ebene die horizontale Wasseroberfläche und die Gerade g die Uferlinie. Die Ebene E stellt im betrachteten Abschnitt den Meeresboden dar. Eine Boje schwimmt auf der Wasseroberfläche an der Stelle, die dem Koordinatenursprung O entspricht (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt. **(3BE)**

Lösung S.69 | Lösungsvideo

Ein Fotograf soll für ein Reisemagazin Unterwasserfotos aufnehmen.

e) Der Fotograf schwimmt entlang der kürzestmöglichen Strecke von der Uferlinie aus zur Boje. Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke. **(4BE)**

Lösung S.70 | Lösungsvideo

Von der Boje aus taucht der Fotograf senkrecht bezüglich der Wasseroberfläche nach unten bis zu einer Stelle, deren Abstand zum Meeresboden genau drei Meter beträgt und im Modell durch den Punkt K darstellt wird.

f) Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht. **(5BE)**

Lösung S.71 | Lösungsvideo

g) Drei kleine farbenfrohe Seesterne befinden sich am Meeresboden und werden im Modell durch die Punkte P, Q und R dargestellt. Der Fotograf bewegt sich für seine Aufnahmen von der Stelle aus, die im Modell durch den Punkt K beschrieben wird, parallel zum Meeresboden. Das Kameraobjektiv zeigt dabei senkrecht zum Meeresboden und hat ein kegelförmiges Sichtfeld mit einem Öffnungswinkel von $90°$ (vgl. Abbildung). Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann. **(3BE)**

Lösung S.72 Lösungsvideo

$\sum 25$

Zurück zum Inhaltverzeichnis

Geometrie Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil B)

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Abb. 1

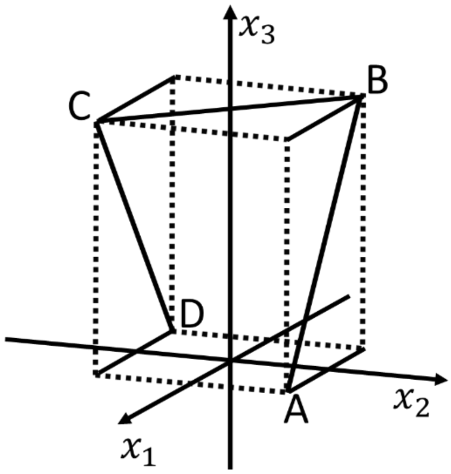


Abb.2

a) Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3-Achse liegen. **(2BE)**

Lösung S.73 | Lösungsvideo

b) Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit. **(3BE)**

Lösung S.73 | Lösungsvideo

Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$)

Lösung S.74 | Lösungsvideo

d) Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2-Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen der Ebene E und F berechnet werden kann. **(5BE)**

Lösung S.75 | Lösungsvideo

e) Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.

Lösung S.75 | Lösungsvideo

f) Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.

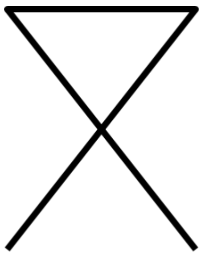


Abb. 3

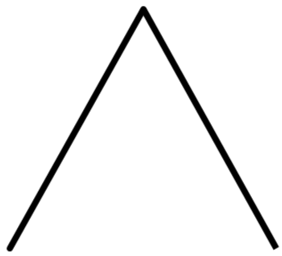


Abb. 4

Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar. **(4BE)**

Lösung S.76 | Lösungsvideo

g) Die Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h:

I $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, t \in [0; 1]$ II $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ III $\overline{PQ} = 28 - h$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen. **(4BE)**

Lösung S.77 | Lösungsvideo

$\sum \mathbf{25}$

Analysis Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil A) **LÖSUNG**

1.

a) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+2x}{x+1}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f. Geben Sie D_f und die Nullstellen von f an. **(2BE)**

Bei gebrochen-rationalen Funktionen müssen genau die Werte bei der maximalen Definitionsmenge ausgeschlossen werden, für die der Nenner (unten) null werden würde.

Definitionsmenge:

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \qquad\qquad | -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

→ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Nullstellen:

Bei gebrochen-rationalen Funktionen wird der Funktionsterm genau dann null, wenn der Zähler null wird.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x}{x+1} &= 0 \qquad\qquad | \cdot (x+1) \\ x^2+2x &= 0 \\ x(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.\ x_1 &= 0 \\ 2.\ x+2 &= 0 \qquad\qquad | -2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Hinweis: Steht „Geben Sie an“ in der Aufgabenstellung, dann ist kein Rechenweg verlangt.

Zurück zur Aufgabe

b) Geben Sie einen Term einer gebrochen-rationalen Funktion h an, die die folgenden Eigenschaften hat: Die Funktion h ist in $\mathbb{R}$ definiert; ihr Graph besitzt die Gerade mit der Gleichung $y = 3$ als waagrechte Asymptote und schneidet die y-Achse im Punkt $(0|4)$. **(3BE)**

waagrechte Asymptote:

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$

Graph von h geht durch den Punkt $(0|4)$:

$h(0) = 4$

$$h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} + 3$$

Zurück zur Aufgabe

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{4}{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen von g.

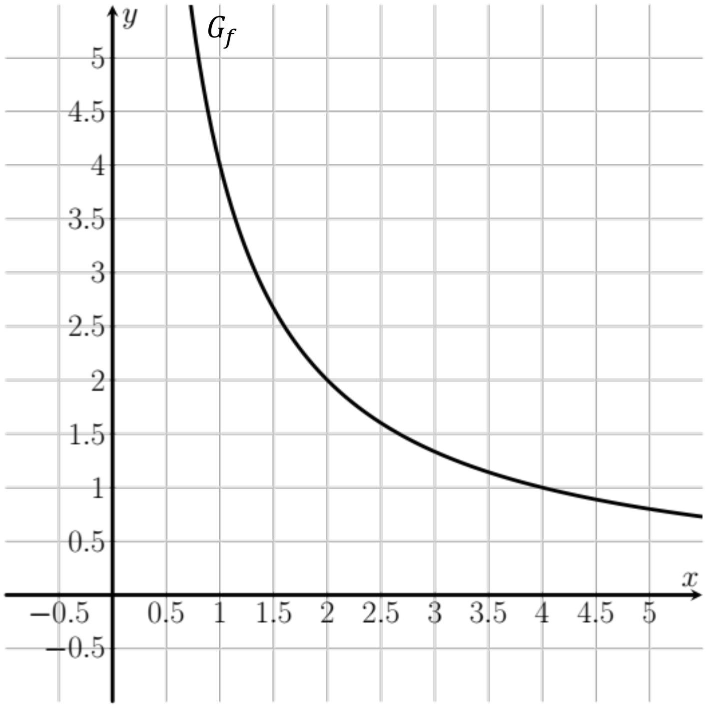


Abb.1

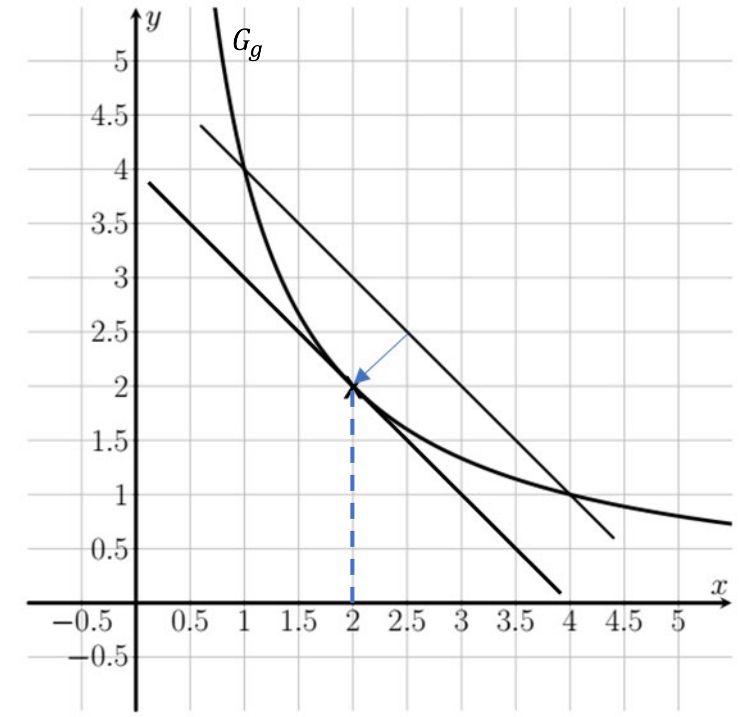
a) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_1^e g(x)\,dx$. **(2BE)**

$$\begin{aligned}\int_1^e g(x)\,dx &= \int_1^e \frac{4}{x}\,dx \\ &= \int_1^e 4 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= [4\ln(x)]_1^e \\ &= 4 \cdot \ln(e) - 4 \cdot \ln(1) \\ &= 4 - 0 \\ &= 4\end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

b) Ermitteln Sie grafisch diejenige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$, für die gilt: Die lokale Änderungsrate von g an der Stelle x_0 stimmt mit der mittleren Änderungsrate von g im Intervall $[1; 4]$ überein. **(3BE)**

Erklärung:
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[1; 4]$ kann dargestellt werden durch die Steigung der Gerade, die den Graphen an den Stellen $x = 1$ und $x = 4$ schneidet (die Gerade heißt Sekante).
Die lokale Änderungsrat an einer Stelle x_0 kann dargestellt werden durch die Steigung der Geraden, die den Graphen an dieser Stelle berührt (Tangente).
Daher muss man für die Lösung die Sekante so parallelverschieben, dass die entstehende Gerade den Graphen nur an einem Punkt berührt.
$x_0 = 2$



Zurück zur Aufgabe

3. Der Graph G_f der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f besitzt nur an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente (vgl. Abbildung 2).
Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g mit $g(x) = f\big(f(x)\big)$.

Abb.2

a) Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $f(6)$ und $g(6)$ an. **(2BE)**

$f(6) = 2$
$g(6) = f\big(f(6)\big) = f(2) = 3$

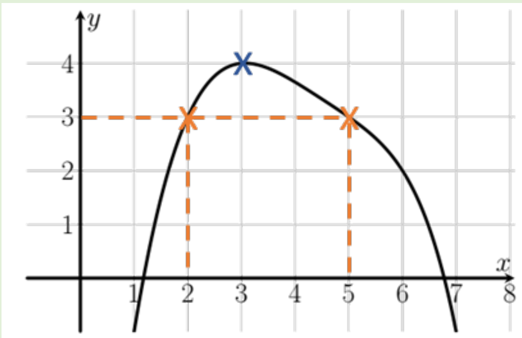
Zurück zur Aufgabe

b) Gemäß der Kettenregel gilt $g'(x) = f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$. Ermitteln Sie damit und mithilfe von Abbildung 2 alle Stellen, an denen der Graph von g eine waagrechte Tangente besitzt. **(3BE)**

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

1. $f'(x) = 0$
   $\rightarrow x_1 = 3$, da G_f eine waagrechte Tangente bei $x = 3$ hat.

2. $f'\big(f(x)\big) = 0$
   $f(x) = 3$
   $\rightarrow x_2 = 2;\ x_3 = 5;$



Zurück zur Aufgabe

4. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$ und $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $f_a'(0) = -a$ gilt. **(1BE)**

$$\begin{aligned} f_a(x) &= a \cdot e^{-x} + 3 \\ f_a'(x) &= a \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ f_a'(x) &= -a \cdot e^{-x} \\ f_a'(0) &= -a \end{aligned}$$

Zurück zu Aufgabe 4a Gruppe 1 Zurück zu Aufgabe 4a Gruppe 2

b) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(0|f_a(0))$. Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die diese Tangente eine positive Steigung hat und zudem die x-Achse in einem Punkt schneidet, dessen x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$ ist. **(4BE)**

$f_a(x) = a \cdot e^{-x} + 3$

Tangentengleichung:

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} t: y &= f_a'(0) \cdot (x-0) + f_a(0) \\ t: y &= -a \cdot x + a + 3 \end{aligned}$$

positive Steigung für $a < 0$.

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} t: y &= m \cdot x + t \\ m &= f_a'(0) = -a \\ \rightarrow y &= -a \cdot x + t \end{aligned}$$

Setze die Koordinaten des Punktes $(0|f_a(0))$ ein und löse nach t auf:

$$\begin{aligned} f_a(0) &= ae^{-0} + 3 \\ f_a(0) &= a + 3 \\ \rightarrow a + 3 &= -a \cdot 0 + t \\ a + 3 &= t \\ \rightarrow t: y &= -a \cdot x + a + 3 \end{aligned}$$

positive Steigung für $a < 0$.

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} t: y &= 0 \\ -a \cdot x + a + 3 &= 0 && | -a-3 \\ -a \cdot x &= -a - 3 && |:(-a) \\ x &= \frac{-a-3}{-a} \\ \text{oder } x &= \frac{a+3}{a} \end{aligned}$$

x-Koordinate größer als $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{-a-3}{-a} &> \frac{1}{2} && | \cdot (-a) \\ -a-3 &> -\frac{1}{2}a && | + a \\ -3 &> \frac{1}{2}a && | \cdot 2 \\ a &< -6 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe 4b Gruppe 1

Zurück zur Aufgabe 4b Gruppe 2

Analysis Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil A) **LÖSUNG**

1. Gegeben ist die Funktion $g: \mapsto \frac{2x^2}{x^2-9}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

a) Geben Sie D_g sowie eine Gleichung der waagrechten Asymptote des Graphen von g an. **(2BE)**

Bei gebrochen-rationalen Funktionen müssen genau die Werte bei der maximalen Definitionsmenge ausgeschlossen werden, für die der Nenner (unten) null werden würde.

Definitionsmenge:

$$\begin{aligned} x^2-9 &= 0 \qquad \mid +9 \\ x^2 &= 9 \\ x_{1,2} &= \pm 3 \end{aligned}$$

→ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$

Gleichung der waagrechten Asymptote:

Die Gleichung der waagrechten Asymptote erhält man durch Grenzwertbetrachtung für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\underbrace{1-\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to 0}}_{\to 1}} = 2$$

Der Graph von g hat eine waagrechte Asymptote bei $y = 2$.

Hinweis: Steht „Geben Sie an“ in der Aufgabenstellung, dann ist kein Rechenweg verlangt.

Zurück zur Aufgabe

b) Zeigen Sie, dass der Graph von g in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente besitzt. **(3BE)**

Die Steigung der Tangente eines Graphen gibt die Steigung des Graphen an dieser Stelle an. Waagrechte Tangenten haben die Steigung 0. Mit der Ableitungsfunktion wird die Steigung des Graphen bestimmt. Also muss bestimmt werden an welcher Stelle die Ableitung gleich 0 wird.

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2-9}$$

$$g'(x) = \frac{(x^2-9)\cdot 4x - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-9)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^3 - 36x - 4x^3}{(x^2-9)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-36x}{(x^2-9)^2}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ -36x &= 0 \qquad \qquad |:(-36) \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

→ G_f hat genau eine waagrechte Tangente an der Stelle $x = 0$.

Zurück zur Aufgabe

2. Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_F von F.

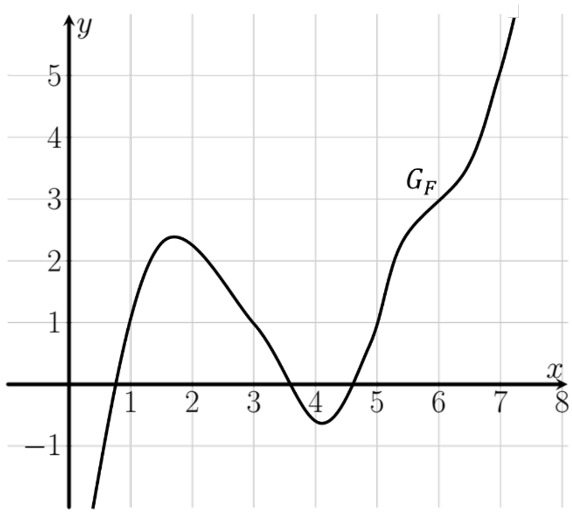


Abb.1

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_1^7 f(x)\,dx$. **(2BE)**

$$\int_1^7 f(x)\,dx = [F(x)]_1^7$$
$$= F(7) - F(1)$$
Werte von G_F ablesen:
$$= 5 - 1$$
$$= 4$$

Zurück zur Aufgabe

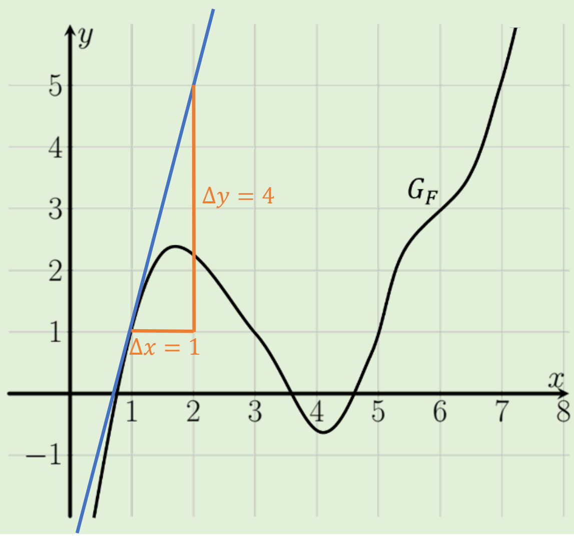
b) Bestimmen Sie den Funktionswert von f an der Stelle 1; veranschaulichen Sie ihr Vorgehen in Abbildung 1. **(3BE)**

Es gilt $F'(x) = f(x)$.
Da die Funktion f die Ableitungsfunktion von F ist, kann die Steigung des Graphen von F durch f angegeben werden.

Die Steigung der Graphen von F kann Graphisch durch die Steigung der Tangente an einer bestimmten Stelle bestimmt werden.

$m_{t_1} = \frac{4}{1} = 4$

→ $f(1) = 4$



Zurück zur Aufgabe

3.

a) Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \ln(2x-3)$ mit Definitionsmenge $D_h =]\frac{3}{2}; +\infty[$. Geben Sie die Nullstelle von h sowie einen Term der ersten Ableitungsfunktion von h an. **(2BE)**

Nullstelle:

$\ln(x)$ wird genau dann 0, wenn $x = 1$ gilt.

Hier:

$$\begin{aligned} \ln(2x-3) &= 0 \\ 2x-3 &= 1 \qquad |+3 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ableitungsfunktion:

$h'(x) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2$

$h'(x) = \frac{2}{2x-3}$

Zurück zur Aufgabe

b) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f besitzt die Nullstelle $x = 2$, außerdem gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.
Betrachtet wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge D_g. Geben Sie D_g an und ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 diejenige Stelle x, für die $g'(x) = f'(x)$ gilt. **(3BE)**

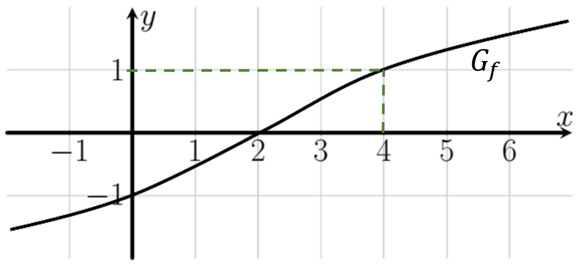


Abb.2

Zur maximalen Definitionsmenge D_g:
Im Argument bei der Logarithmusfunktion dürfen nur positive Werte stehen.
Also muss für $\ln(f(x))$ gelten, dass $f(x) > 0$ ist. Das gilt in den Bereichen, in denen sich G_f oberhalb der x-Achse befindet.
→ $D_f =]2; +\infty[$

Wir leiten zunächst $g(x)$ ab:

$$g(x) = \ln(f(x))$$

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Nun setzen wir, wie in der Aufgabenstellung verlangt, gleich:

$$g'(x) = f'(x)$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = f'(x) \qquad |: f'(x),\ f'(x) > 0\text{, vgl. Aufgabenstellung)}$$

$$\frac{1}{f(x)} = 1 \qquad | \cdot f(x)$$

$$1 = f(x)$$

Das gilt an der Stelle $x = 4$ (vergleiche mit dem Graphen).

Zurück zur Aufgabe

Stochastik Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil A) **LÖSUNG**

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=10)$ übereinstimmt. **(2BE)**

Die betrachteten Ereignisse beinhalten jeweils 3 Elementarereignisse, die jeweils gleichwahrscheinlich sind.

$P(X=4)=P(\text{"Augensumme gleich 4"})$

1	3	2	2	3	1
$p_1=\frac{1}{6}$	$p_3=\frac{1}{6}$	$p_2=\frac{1}{6}$	$p_2=\frac{1}{6}$	$p_3=\frac{1}{6}$	$p_1=\frac{1}{6}$

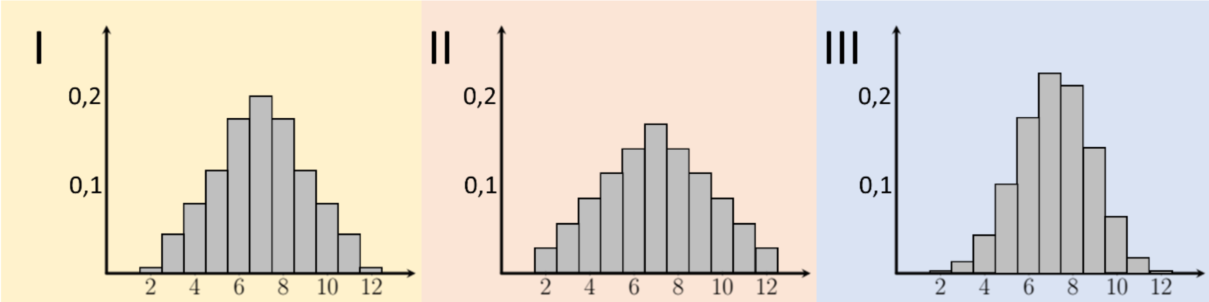
$$P(X=4)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

6	4	5	5	4	6
$p_6=\frac{1}{6}$	$p_4=\frac{1}{6}$	$p_5=\frac{1}{6}$	$p_5=\frac{1}{6}$	$p_4=\frac{1}{6}$	$p_6=\frac{1}{6}$

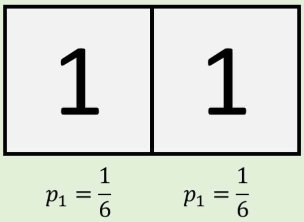
$$P(X=10)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

Zurück zur Aufgabe

b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. **(3BE)**



- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.



Da $P(X = 4) = P(X = 10)$ gilt, kommen nur I oder II in Frage.

Wir betrachten $P(X = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \frac{3}{108} \approx 3\% \rightarrow$ II

Oder:

$P(X = 2) = \frac{1}{36}$ und $P(X = 4) = \frac{1}{12}$ (in a) berechnet) $\rightarrow P(X = 4) = 3 \cdot P(X = 2) \rightarrow$ II

- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

Y ist eine binomialverteilte Zufallsgröße: $P(Y = k) = \binom{12}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{n-k}$

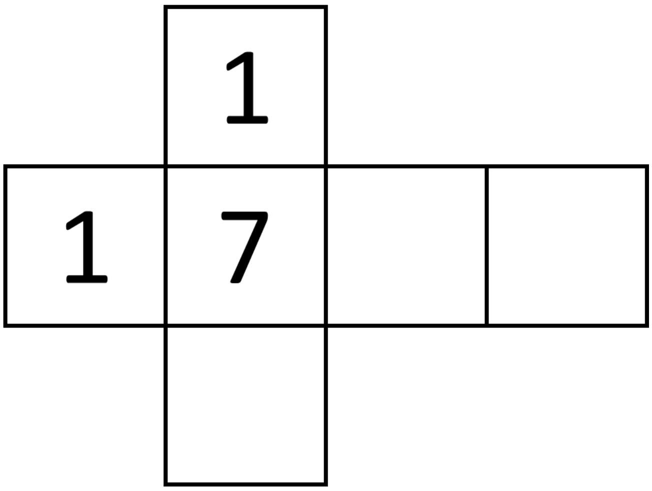
Die Verteilung ist nicht symmetrisch:
z.B.
$P(Y = 4) = \binom{12}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^8$ und $P(Y = 8) = \binom{12}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^4$

Also kommt nur III in Frage.

Zurück zur Aufgabe

Stochastik Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil A) **LÖSUNG**

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels, von dem nur drei Seiten beschriftet sind.



a) Der Würfel wird so lange geworfen, bis die Zahl 1 zum ersten Mal erzielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau viermal gewürfelt wird. **(2BE)**

Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf eine 1 zu werfen liegt bei $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Wenn genau viermal gewürfelt werden soll, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht dreimal hintereinander keine 1 und beim vierten Wurf die 1 zu würfeln.

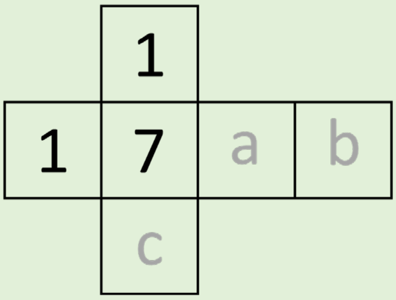
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	1
$p_{\overline{1}} = \frac{2}{3}$	$p_{\overline{1}} = \frac{2}{3}$	$p_{\overline{1}} = \frac{2}{3}$	$p_1 = \frac{1}{3}$

→ $P(\text{"Es wird viermal geworfen"}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^3}{3^4} = \frac{8}{81}$

Zurück zur Aufgabe

b) Die drei leeren Seiten des Würfels sollen jeweils mit einer positiven geraden Zahl beschriftet werden. Ermitteln Sie eine Möglichkeit für die Beschriftung dieser drei Seiten, sodass bei einmaligem Werfen des Würfels der Erwartungswert für die erzielte Zahl $\frac{31}{6}$ beträgt. **(3BE)**

Der Einfachheit wegen beschriften wird die leeren Seiten zunächst mit Buchstaben.



$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 7 + \frac{1}{6}\cdot a + \frac{1}{6}\cdot b + \frac{1}{6}\cdot c \\ &= \frac{2+7+a+b+c}{6} \\ &= \frac{9+a+b+c}{6} \end{aligned}$$

→ $a+b+c = 31 - 9 = 22$

Wähle z.B. $a = 6$; $b = 6$; $c = 10$ oder $a = 4$; $b = 4$; $c = 14$;
Wichtig ist nur, dass die Summe aus a, b und c den Wert 22 ergibt.

Zurück zur Aufgabe

Geometrie Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil A) **LÖSUNG**

Gegeben ist die Kugel K mit Mittelpunkt $M(3|-6|5)$ und Radius $2\sqrt{6}$.

a) Geben Sie eine Gleichung von K in Koordinatenform an und zeigen Sie, dass der Punkt $P(5|-4|1)$ auf K liegt. **(3BE)**

$$K: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \right)^2 = \left(2 \cdot \sqrt{6}\right)^2$$

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 6)^2 + (x_3 - 5)^2 = 2^2 \cdot 6$$

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 6)^2 + (x_3 - 5)^2 = 24$$

Wir setzen die Koordinaten des Punktes P ein:

$$\begin{aligned} (5-3)^2 + (-4+6)^2 + (1-5)^2 &= 2^2 + 2^2 + (-4)^2 \\ &= 4 + 4 + 16 \\ &= 24 \end{aligned}$$

→ P liegt auf K

Zurück zur Aufgabe

b) Untersuchen Sie, ob K die x_1x_2 −Ebene schneidet. **(2BE)**

$E_{1,2}: x_3 = 0$

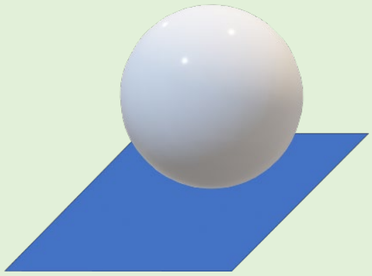
Um zu überprüfen, ob eine Ebene eine Kugel schneidet, bestimmt man den Abstand zwischen Mittelpunkt der Kugel und Ebene und vergleicht diesen Wert mit dem Radius der Kugel.

1. Möglichkeit:

Der Abstand von M zur $x_{1,2}$ −Ebene entspricht einfach der x_3 −Koordinate von $M(3|-6|5)$. Also beträgt der Abstand 5.

$5 > 2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$

→ K schneidet die x_1x_2 −Ebene nicht.



2. Möglichkeit: Wir stellen die Hesse-Normalenform auf

HNF: $\frac{x_3 - 0}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = x_3$

Wir setzen die Koordinaten des Mittelpunktes ein, um dessen Abstand zur Ebene zu erhalten:

$d\left(E_{1,2}, K\right) = |5| = 5 > 2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$

→ K schneidet die x_1x_2 −Ebene nicht.

3. Möglichkeit: Um den Abstand zwischen Ebene und Kugelmittelpunkt zu bestimmen erstellen wir die Geradengleichung der Gerade, die senkrecht auf der Ebene steht und durch M geht.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen den Schnittpunkt zwischen Ebene und Gerade. Dazu setzten wird einen allgemeinen Punkt der Gerade in die Ebenengleichung ein:

$5 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -5$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird der Abstand zwischen S und M berechnet:

$$\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (-6-(-6))^2 + (5-0)^2} = \sqrt{25} = 5 > 2\sqrt{6} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$$

→ K schneidet die x_1x_2 −Ebene nicht.

Zurück zur Aufgabe

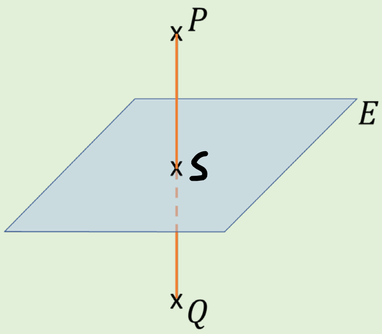
Geometrie Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil A) **LÖSUNG**

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. **(3BE)**

Wenn der Punkt P an der Ebene E gespiegelt wird, dann ist der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu Ebene, also ein Normalenvektor der Ebene.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-2 \\ 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Damit können wir die Ebenengleichung teilweise angeben:

$E: 3x_1 + 4x_3 + d = 0$

Um d zu bestimmen benötigt man die Koordinaten eines Punktes, der auf der Ebene liegt. Geht man vom Punkt P aus um $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ dann erhält man die Koordinaten eines Punktes der Ebene.

$$\overrightarrow{0S} = \overrightarrow{0P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Wir setzen die Koordinaten von S in die Ebenengleichung E ein.

$3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + d = 0$

→ $d = -40$

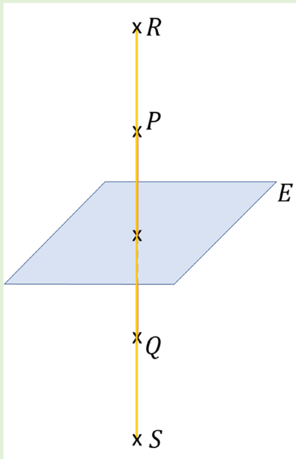
→ $E: 3x_1 + 4x_3 - 40 = 0$

Zurück zur Aufgabe

b) Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q.
Bestimmen Sie die Koordinaten von R. **(2BE)**

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$R(-2|2|-1)$



Zurück zur Aufgabe

Analysis Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil B) **LÖSUNG**

Gegeben ist die in $[0; 10]$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{10x - x^2}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f. **(2BE)**
(zur Kontrolle: 0 und 10)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2 \cdot \sqrt{10x - x^2} &= 0 \\ \rightarrow -x^2 + 10x &= 0 \\ x(-x + 10) &= 0 \\ &= 0 \\ &= 0 \qquad | + x \\ x_2 &= 10 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

Hügel-Schule
BY HÜGEL RUDOLF
WIR BRINGEN DICH ÜBER DEN BERG

b) Der Graph G_f besitzt in genau einem Punkt eine waagrechte Tangente. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts und begründen Sie, dass es sich um einen Hochpunkt handelt. **(5BE)**
(*zur Kontrolle:* $f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$; $y -$ Koordinate des Hochpunkts: 10)

$$f(x) = (g(x))^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x)$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2 \cdot \sqrt{10x - x^2} \\
f'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10x - x^2}} \cdot (10 - 2x) \\
f'(x) &= \frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}} \\
\frac{10 - 2x}{\sqrt{10x - x^2}} &= 0 && | \cdot \sqrt{10x - x^2} \\
10 - 2x &= 0 && | + 2x \\
2x &= 10 && |: 2 \\
x &= 5 \text{ (einfach, VZW)}
\end{aligned}
$$

$f(5) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot 5 - 5^2} = 10$

1. Möglichkeit:
Da $f(0) = 0$ und $f(5) = 10$, gilt $f(0) < f(5)$. Also hat G_f bei $x = 5$ einen Hochpunkt.

2. Möglichkeit:
Vorzeichentabelle

	$x < 5$	$x = 5$	$5 < x$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$
G_f	↗	HOP	↘

Probewert: $f'(1) = \frac{10-2}{\sqrt{10-1^2}} = \frac{8}{3} > 0$

Zurück zur Aufgabe

c) Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt. Einer der folgenden Terme ist ein Term der zweiten Ableitungsfunktion f'' von f. Beurteilen Sie, ob dies Term I oder Term II ist, ohne einen Term von f'' zu berechnen. **(3BE)**

I $f''(x) = \frac{50}{(x^2-10x)\cdot\sqrt{10x-x^2}}$ II $f''(x) = \frac{50}{(10x-x^2)\cdot\sqrt{10x-x^2}}$

Zu I: $f''(1) = \frac{50}{-9\cdot\sqrt{9}} < 0$ → Der zugehörige Graph ist rechtsgekrümmt.
→ Term I ist der gesuchte.

Zu II: $f''(1) = \frac{50}{9\cdot\sqrt{9}} > 0$ → Der zugehörige Graph ist linksgekrümmt.

Zurück zur Aufgabe

d) Weisen Sie nach, dass für $0 \leq x \leq 5$ die Gleichung $f(5-x) = f(5+x)$ erfüllt ist, indem Sie die Terme $f(5-x)$ und $f(5+x)$ geeignet umformen. **(5BE)**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\cdot\sqrt{10x-x^2} \\
f(5-x) &= 2\sqrt{10(5-x)-(5-x)^2} \\
&= 2\sqrt{50-10x-(25-10x+x^2)} \\
&= 2\sqrt{50-10x-25+10x-x^2} \\
&= 2\sqrt{25-x^2} \\
f(5+x) &= 2\sqrt{10(5+x)-(5+x)^2} \\
&= 2\sqrt{50+10x-(25+10x+x^2)} \\
&= 2\sqrt{50-25-x^2} \\
&= 2\sqrt{25-x^2}
\end{aligned}
$$

Zurück zur Aufgabe

e) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich des Terms $f'(x) = \frac{10-2x}{\sqrt{10x-x^2}}$ an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. **(4BE)**

Grundsätzlich dürfen unter der Wurzel einer Zahl nur nichtnegative Werte stehen. Da die Wurzel im Nenner steht, darf der Term aber gleichzeitig auch nicht null werden. Wir suchen also die Werte für x, für die der Wert unter der Wurzel positiv ist.

$$10x - x^2 > 0$$

$$x(10-x) > 0$$

Die linke Seite wird für $x = 0$ und $x = 10$ null. Der zugehörige Graph beschreibt eine nach unten geöffnete Parabel.

Also gilt die Ungleichung für $0 < x < 10$.

→ $D_f =]0;10[$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{10 - \overbrace{2x}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{10x-x^2}}_{\to 0}} = +\infty$$

Die Steigung des Graphen von f für $x \to 0$ gegen unendlich.

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{0{,}1} = 10$$

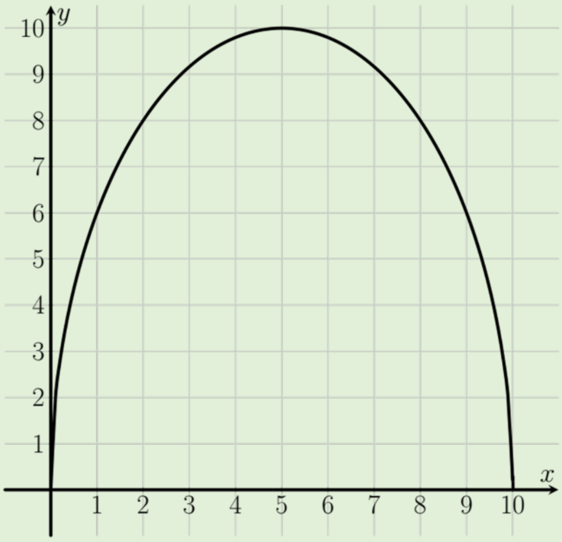
$$\frac{1}{0{,}01} = 100$$

$$\frac{1}{0{,}001} = 1000$$

Zurück zur Aufgabe

f) Geben Sie $f(8)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnissen in ein Koordinatensystem ein. **(4BE)**

$f(8) = 2 \cdot \sqrt{10 \cdot 8 - 8^2} = 2 \cdot \sqrt{16} = 8$



Zurück zur Aufgabe

g) Betrachtet wird die Tangente an G_f im Punkt $(2|f(2))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet. **(2BE)**

Für den Winkel zwischen Tangente und x-Achse gilt allgemein $\tan(\alpha) = m_2$, wobei m_2 die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 2$ beschreibt. Gleichzeitig ist die Steigung der Tangente auch immer gleich der Steigung der Funktion an der entsprechenden Stelle.
Es gilt:

$$\tan(\alpha) = m_2 = f'(2)$$

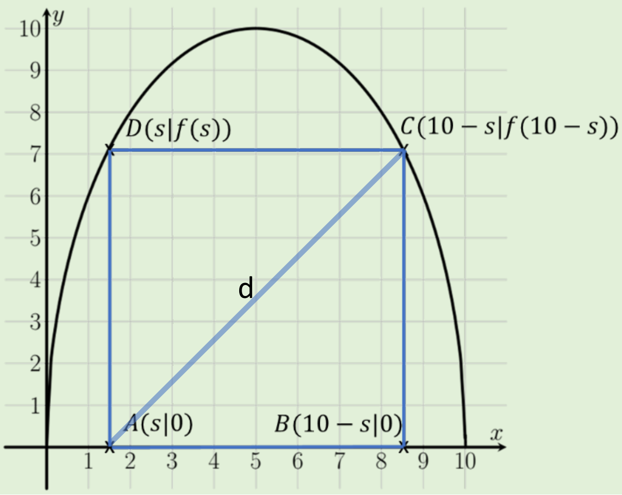
$$f'(2) = \frac{10 - 2 \cdot 2}{\sqrt{10 \cdot 2 - 2^2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56{,}31°$$

Zurück zur Aufgabe

h) Von den Eckpunkten des Rechtecks ABCD liegen der Punkt $A(s|0)$ mit $s \in]0;5[$ sowie der Punkt B auf der x-Achse, die Punkte C und D liegen auf G_f. Das Rechteck besitzt somit die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ als Symmetrieachse. Zeigen Sie, dass die Diagonalen dieses Rechtecks jeweils die Länge 10 besitzen. **(5BE)**



Breite des Rechtsecks:
$10 - s - s = 10 - 2s$

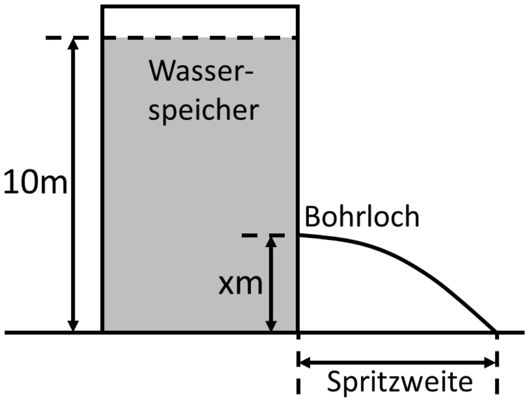
Höhe des Rechtecks:
$f(s) = 2 \cdot \sqrt{10s - s^2}$

Länge der Diagonalen d:

$$\begin{aligned} d^2 &= (10-2s)^2 + \left(2 \cdot \sqrt{10s - s^2}\right)^2 \\ d^2 &= 100 - 40s + 4s^2 + 4 \cdot (10s - s^2) \\ d^2 &= 100 - 40s + 4s^2 + 40s - 4s^2 \\ d^2 &= 100 \\ d &= 10 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

Ein Wasserspeicher hat die Form eines geraden Zylinders und ist bis zu einem Füllstand von 10 m über dem Speicherboden mit Wasser gefüllt. Bohrt man unterhalb des Füllstands ein Loch in die Wand des Wasserspeichers, so tritt unmittelbar nach Fertigstellung der Bohrung Wasser aus, das in einer bestimmten Entfernung zur Speicherwand auf den Boden trifft. Diese Entfernung wird im Folgenden Spritzweite genannt (vgl. Abbildung). Die Abhängigkeit der Spritzweite von der Höhe des Bohrlochs wird durch die in den bisherigen Teilaufgaben betrachtete Funktion f modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Höhe des Bohrlochs über dem Speicherboden in Metern und $f(x)$ die Spritzweite in Metern.



i) Der Graph G_f verläuft durch den Punkt $(3{,}6|9{,}6)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. **(1BE)**

Bei einer Höhe des Bohrlochs von 3,6 Metern beträgt die Spritzweite 9,6 Meter.

Zurück zur Aufgabe

j) Berechnen Sie die Höhen, in denen das Loch gebohrt werden kann, damit die Spritzweite 6 m beträgt. Geben Sie zudem die Höhe an, in der das Loch gebohrt werden muss, damit die Spritzweite maximal ist. **(5BE)**

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\cdot\sqrt{10x-x^2} \\
f(x) &= 6 \\
6 &= 2\cdot\sqrt{10x-x^2} && |:2 \\
3 &= \sqrt{10x-x^2} && |^2 \\
9 &= 10x-x^2 && |+x^2-10x \\
x^2-10x+9 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2} = \frac{10\pm8}{2}
\end{aligned}$$

$x_1 = 1; \qquad x_2 = 9;$

Bei einer Bohrlochhöhe von 1 Meter oder 9 Metern beträgt die Spritzweite 6 Meter.
Die maximale Spritzweite erhält man bei $x = 5$ Metern (vgl. f) und h)).

Zurück zur Aufgabe

k) Es wird nun ein bestimmtes Bohrloch im Wasserspeicher betrachtet. Durch das Abfließen verringert sich das Volumen des Wassers im Speicher in Abhängigkeit von der Zeit. Die Funktion $g: t \mapsto 0{,}25t - 25$ mit $0 \leq t \leq 100$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung dieser Volumenänderung. Dabei ist t die seit der Fertigstellung des Bohrlochs vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Speicher in Litern pro Sekunde.
Berechnen Sie das Volumen des Wassers in Litern, das innerhalb der ersten Minute nach Fertigstellung des Bohrlochs aus dem Behälter abfließt. **(4BE)**

$f(x) = x^n; F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$

$$\begin{aligned}\int_0^{60} \left(\frac{1}{4}t - 25\right) dt &= \left[\frac{1}{8}t^2 - 25t\right]_0^{60} \\ &= \left(\frac{1}{8} \cdot 60^2 - 25 \cdot 60\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 0^2 - 25 \cdot 0\right) \\ &= -1050 - 0\end{aligned}$$

Das Volumen des abgeflossenen Wassers beträgt 1050 Liter.

Zurück zur Aufgabe

Analysis Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil B) **LÖSUNG**

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

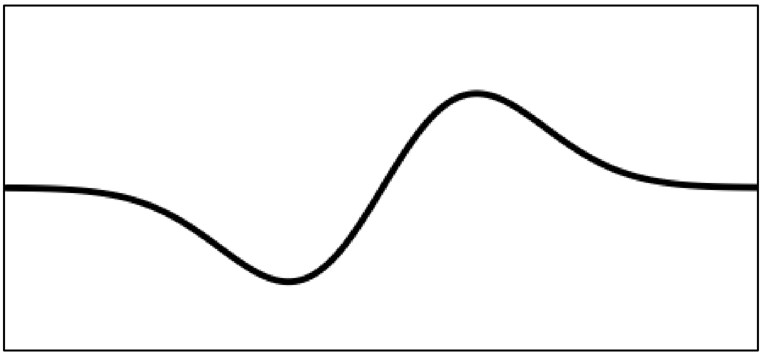


Abb. 1

a) Zeigen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Begründen Sie, dass f genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an. **(4BE)**

$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$

Symmetrieverhalten:

$f(-x) = f(x)$ → G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

$f(-x) = -f(x)$ → G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{2}} \\ &= -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

→ Der Graph von f ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}}_{>0} &= 0 \\ \rightarrow x &= 0 \text{ ist einzige Nullstelle} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}^{\to-\infty}}}_{\to 0^+} = 0^+$$

Die e-Funktion verläuft „schneller“ gegen 0 als x gegen $+\infty$.

Zurück zur Aufgabe

b) Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion f' von f. **(2BE)**

(zur Kontrolle: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$)

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\right)$$
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \cdot (-x^2)$$
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}(1 - x^2)$$

Produktregel:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Zurück zur Aufgabe

c) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f. Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. **(5BE)**

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}(1-x^2) \\ f'(x) &= 0 \\ \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}}_{>0}(1-x^2) &= 0 \\ 1-x^2 &= 0 \qquad\qquad |+x^2 \\ x^2 &= 1 \qquad\qquad |\sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 1 \text{ (jeweils einfach, VZW)} \end{aligned}$$

(Hinweis: Hat man eine Nullstelle gerader Vielfachheit (z.B. doppelt), dann findet an dieser Stelle kein Vorzeichenwechsel statt.)

Vorzeichentabelle: $\boxed{(0)}$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$---$	0	$+++$	0	$---$
G_f	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

1. Möglichkeit für die Vorzeichentabelle

Da $e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} > 0$, gilt für $x < -1$, dass $f'(x) < 0$ ist. Da die Vielfachheit der Nullstellen bekannt ist, folgen die Inhalte der Vorzeichentabelle.

2. Möglichkeit für die Vorzeichentabelle

Wir setzen einen Probewert in $f'(x)$ ein, der keine Nullstelle ist. Dieser kann beliebig gewählt werden.

z.B. $f'(0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2+\frac{1}{2}}(1-0^2) = e^{\frac{1}{2}} > 0$

Da die Vielfachheit der Nullstellen bekannt ist, folgen die Inhalte der Vorzeichentabelle.

3. Möglichkeit für die Vorzeichentabelle

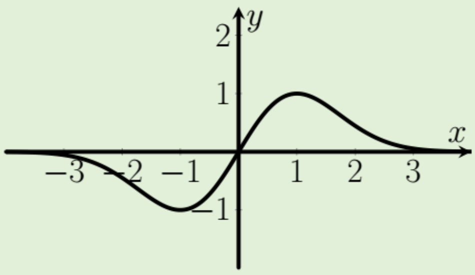
Man setzt für jedes Intervall einen beliebigen Wert in $f'(x)$ ein und damit die Inhalte der Vorzeichentabelle.

z.B.: $f'(-2) = e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+\frac{1}{2}}(1-(-2)^2) = e^{-2+\frac{1}{2}}(1-4) < 0$

$f'(0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2+\frac{1}{2}}(1-0^2) = e^{\frac{1}{2}}(1-0) > 0$

$f'(2) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{2}}(1-2^2) = e^{-2+\frac{1}{2}}(1-4) < 0$

f ist streng monoton zunehmend im Intervall $[-1; 1]$.
f ist streng monoton abnehmend in den Intervallen $]-\infty; -1]$ und $[1; +\infty[$.



Zurück zur Aufgabe

d) Ist g' die erste Ableitungsfunktion einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g, so gilt bekanntlich $\int_u^v g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = \left[e^{g(x)}\right]_u^v$. Berechnen Sie damit den Wert des Terms $\int_0^1 f(x)\,dx$.
(3BE)

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \\ \int_0^1 f(x)\,dx &= \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\right]_0^1 \\ &= -e^{-\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}} - (-e^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2+\frac{1}{2}}) \\ &= -e^0 - (-e^{\frac{1}{2}}) \\ &= -1 + e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}\right)' = -x \\ &f(x) = -\left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\right) \\ &F(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} + C \end{aligned}}$$

Zurück zur Aufgabe

e) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:
Für jede Stammfunktion F von f und für jede reelle Zahl $w > 2022$ gilt

$$F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x)\,dx. \textbf{ (3BE)}$$

Mit $F(w) - F(0)$ wird der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich von $x = 0$ bis $x = w$ beschrieben (vgl. Graphen).
Dieser Flächeninhalt entspricht für $w > 2022$ in etwa dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich von $x = 0$ bis $x = 2022$.

Zurück zur Aufgabe

2. Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$f_a: x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt $(1|1)$ enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von a an. **(3BE)**

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &= x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}} \\
f_a(1) &= 1 \\
e^{-\frac{1}{2}a \cdot 1^2 + \frac{1}{2}} &= 1 && |ln \\
-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} &= \ln(1) \\
-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} &= 0 && |-\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}a &= -\frac{1}{2} && |:(-\frac{1}{2}) \\
a &= 1
\end{aligned}
$$

→ Nur für $a = 1$ enthält der Graph von f_a den Punkt $(1|1)$.

Zurück zur Aufgabe

b) Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der y-Achse an. **(2BE)**

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &= x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}} \\
f_0(x) &= x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{2}} \\
f_0(x) &= x \cdot e^{\frac{1}{2}} \\
f_0(x) &= e^{\frac{1}{2}} \cdot x + 0
\end{aligned}
$$

Steigung m: $m = e^{\frac{1}{2}}$

y-Achsenabschnitt: $t = 0$ → Schnittpunkt der Gerade mit der y-Achse bei $(0|0)$.

Zurück zur Aufgabe

c) Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen a, a_1 und a_2:

- $f_a(0) = 0$
- $f_a'(0) = f_0'(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ oder $x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt.

$f_a(0) = 0$ → Alle Graphen der Schar von f_a verlaufen durch den Punkt $(0|0)$ bzw. gehen durch den Ursprung.

$f_a'(0) = f_0'(0)$ → Die Steigung aller Graphen der Schar von f_a an der Stelle $x = 0$ ist gleich (der Steigung des Graphen von f_0).

$f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ oder $x = 0$

→ Alle Graphen der Schar von f_a schneiden sich nur im Ursprung.

Zurück zur Aufgabe

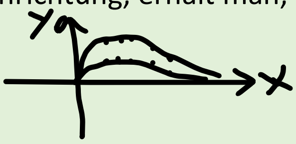
d) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von a richtig ist:

Wird der Graph von f_a mit dem gleichen Faktor $k > 0$ sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.

$$f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$$

Einen um den Faktor k gestreckten Graphen in y-Achsenrichtung, erhält man, wenn jeder Funktionswert mit dem Wert k multipliziert wird.

Einen um den Faktor k gestreckten Graphen in x-Achsenrichtung, erhält man, wenn jeder x-Wert des Funktionsterms mit $\frac{x}{k}$ ersetzt wird.



$$\rightarrow k \cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right) = k \cdot \frac{x}{k} \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{x}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$k \cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \frac{x^2}{k^2} + \frac{1}{2}}$$

$$k \cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{a}{k^2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} = f_{\frac{a}{k^2}}(x)$$

Man kann den Term also so vereinfachen, dass die Variable k nur noch an dieser Stelle auftaucht, an der auch a steht. Somit kann man diesen Ausdruck $\left(\frac{a}{k^2}\right)$ wieder als eine Variable $u = \frac{a}{k^2}$ auffassen.

$\rightarrow k \cdot f_a\left(\frac{x}{k}\right) = f_u(x)$ mit $u = \frac{a}{k^2}$

Zurück zur Aufgabe

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.

II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

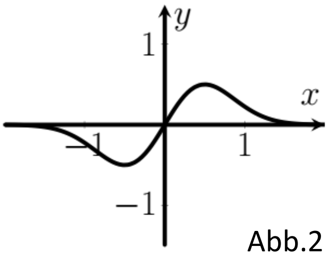


Abb.2

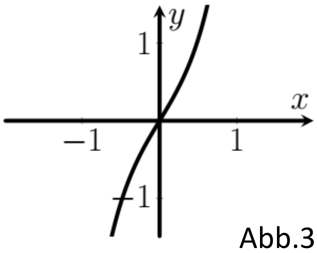


Abb.3

Die Extremstellen von f_a stimmen mit den Lösungen der Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ überein.

e) Geben Sie zu jeder der beiden Gruppen I und II alle zugehörigen Werte von a an und begründen Sie Ihre Angabe. **(3BE)**

$a \cdot x^2 = 1$

Für $a < 0$: Die Gleichung hat keine Lösung. → G_{f_a} hat keine Extrempunkte → Gruppe II

Für $a = 0$: Der Graph der Funktion f_0 ist eine Gerade. (vgl. b) → Gruppe II

Für $a > 0$: Die Gleichung hat zwei unterschiedliche Lösungen.

→ f_a' hat zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechseln.

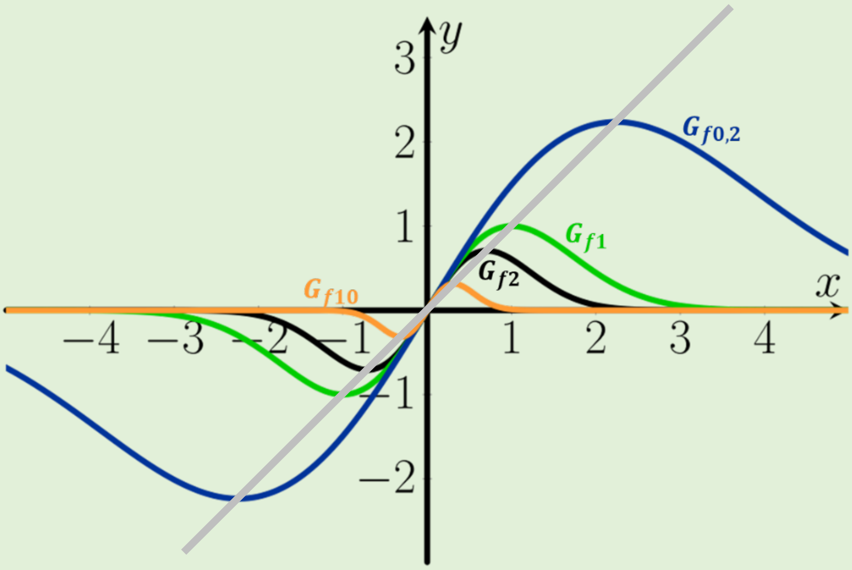
→ f_a hat zwei Extremstellen.

→ Gruppe I

Zurück zur Aufgabe

f) Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf einer Gerade. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = x$ handelt. **(3BE)**

$$f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$$



Bei der Gerade mit der Gleichung $y = x$ gilt, dass sie durch die Punkte $(s|s)$ mit $s \in \mathbb{R}$ geht, also durch alle Punkte, die also x-Koordinate und y-Koordinate den gleichen Wert besitzen.
Wir zeigen, dass das auch für alle Extrempunkte der Graphen der Schar gilt:
Die x-Koordinaten der Extrempunkte erhalten wir indem die Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ gelöst wird.

$$\begin{aligned} a \cdot x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{a} \qquad |\sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

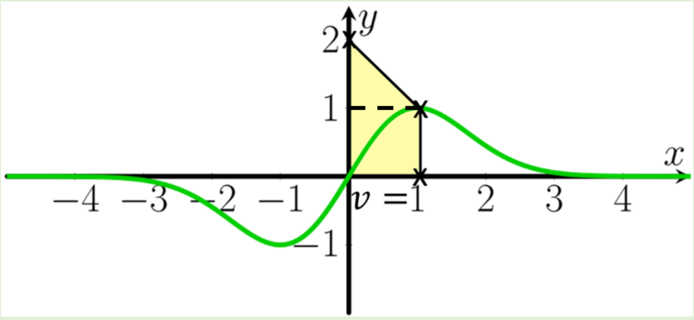
$$\begin{aligned} f_a\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right) &= \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^0 \\ &= \sqrt{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

$$f_a\left(-\sqrt{\frac{1}{a}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{a}}$$

→ Alle Extrempunkte der Graphen der Schar liegen auf der Gerade mit der Gleichung $y = x$.

Zurück zur Aufgabe

g) Für jeden positiven Wert von a bilden der Hochpunkt $(v|f_a(v))$ des Graphen von f_a, der Punkt $(0|\frac{2}{v})$, der Koordinatenursprung und der Punkt $(v|0)$ die Eckpunkte eines Vierecks. Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von a, für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat. **(6BE)**



Flächeninhalt Trapez: $A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} + v\right) \cdot v$

Oder

Flächeninhalt des Rechtecks: $A_{\blacksquare} = v^2$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} - v\right) \cdot v$

Flächeninhalt Viereck: $A_{ges} = v^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} - v\right) \cdot v$

$$\begin{aligned}
A_{ges} &= v^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} - v\right) \cdot v \\
49 &= v^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} - v\right) \cdot v \\
49 &= v^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} - v\right) \cdot v \\
49 &= v^2 + \frac{1}{2} \cdot (2 - v^2) \\
49 &= v^2 + 1 - \frac{1}{2} v^2 \\
49 &= \frac{1}{2} v^2 + 1 && | -1 \\
48 &= \frac{1}{2} v^2 && | \cdot 2 \\
v^2 &= 96
\end{aligned}$$

Der Hochpunkt des Graphen hat allgemein die Koordinaten $H\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\middle|\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ (vgl. e) und f))

$$\begin{aligned}
\rightarrow v &= \sqrt{\frac{1}{a}} \\
v^2 &= \frac{1}{a} \\
\rightarrow \frac{1}{a} &= 96 \\
\rightarrow a &= \frac{1}{96}
\end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

Stochastik Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil B) **LÖSUNG**

Um die Wirksamkeit eines Pflanzenschutzmittels gegen Pilzbefall nachzuweisen, wurden zahlreiche Versuche durchgeführt, bei denen landwirtschaftliche Nutzpflanzen zunächst mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht wurden. Im Mittel sind dabei 5% der Pflanzen von Pilzen befallen worden.

1. Bei einem weiteren solchen Versuch mit n Pflanzen beschreibt die Zufallsgröße X_n die Anzahl der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass X_n binomialverteilt ist mit den Parametern n und $p = 0{,}05$.

a) Es werden 15 Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend mit Pilzsporen besprüht. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: **(6BE)**

E_1: „Keine der Pflanzen wird von Pilzen befallen."
E_2: „Höchstens zwei Pflanzen werden von Pilzen befallen."
E_3: „12 oder 13 Pflanzen bleiben ohne Pflanzenbefall."

$P(E_1) = P(X_{15} = 0) = \binom{15}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{15} \approx 0{,}46329$ (oder TW)

$P(E_2) = P(X_{15} \leq 2) = P(X_{15} = 0) + P(X_{15} = 1) + P(X_{15} = 2) \overset{\text{TW}}{=} 0{,}96380$

$P(E_3) = P(2 \leq X_{15} \leq 3) \overset{\text{TW}}{=} 0{,}13475 + 0{,}03073 = 0{,}16548$

Zurück zur Aufgabe

n	k	$p = 0{,}05$	
		$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$
15	0	0,46329	0,46329
	1	0,36576	0,82905
	2	0,13475	0,96380
	3	0,03073	0,99453
	4	0,00485	0,99939
	5	0,00056	0,99995
	6	0,00005	1,00000
	7		
	8		
	9		
	10		

b) Bestimmen Sie den kleinsten Wert von n, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Pflanze von Pilzen befallen wird, mindestens 99% beträgt. **(4BE)**

$P(\text{"keine Pflanze wird befallen"}) = 0{,}95^n$ (vgl. a))

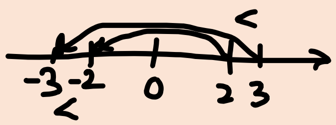
$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \ldots n$

Das Gegenereignis beschreibt immer alle Fälle, die im Ereignis nicht enthalten sind. Das Gegenereignis zu „keine Pflanze wird befallen" ist damit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,…n Pflanzen sind befallen oder anders ausgedrückt „mindestens eine Pflanze ist befallen".

$$\begin{aligned} \rightarrow P(\text{"mindestens eine Pflanze ist befallen"}) &\geq 0{,}99 \\ 1 - P(\text{"keine Pflanze wird befallen"}) &\geq 0{,}99 \end{aligned}$$

Wir betrachten zwei Arten die Gleichungen umzuformen.

1. Möglichkeit



$$\begin{aligned} 1 - 0{,}95^n &\geq 0{,}99 && |-1 \\ -0{,}95^n &\geq -0{,}01 && |\cdot(-1) \text{ ist } < 0 \\ 0{,}95^n &\leq 0{,}01 && |ln \\ \ln(0{,}95^n) &\leq \ln(0{,}01) && \\ n \cdot \ln(0{,}95) &\leq \ln(0{,}01) && |:\ln(0{,}95) \text{ ist } < 0 \\ n &\geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}95)} \approx 89{,}8 && \end{aligned}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}95^n &\geq 0{,}99 && |-1 \\ -0{,}95^n &\geq -0{,}01 && |+0{,}95^n + 0{,}01 \\ 0{,}01 &\geq 0{,}95^n && |ln \\ \ln(0{,}01) &\geq \ln(0{,}95^n) && \\ \ln(0{,}01) &\geq n \cdot \ln(0{,}95) && |:\ln(0{,}95) \text{ ist } < 0 \\ n &\geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}95)} \approx 89{,}8 && \end{aligned}$$

Der kleinste Wert für n beträgt 90.

Zurück zur Aufgabe

c) Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass bei einem Versuch mit 400 Pflanzen der Wert der Zufallsgröße X_{400} um höchstens eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, die kleinst- und die größtmögliche relative Häufigkeit der Pflanzen, die von Pilzen befallen werden. **(4BE)**

Wir haben eine binomialverteilte Zufallsgröße mit $n = 400$ und $p = 0{,}05$.

$$\begin{aligned} \rightarrow E(X) &= n \cdot p &&= 400 \cdot 0{,}05 &&= 20 \\ Var(X) &= n \cdot p \cdot (1-p) &&= 400 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 &&= 19 \\ \sigma(X) &= \sqrt{Var(X)} &&= \sqrt{19} &&\approx 4{,}36 \end{aligned}$$

Abweichung um höchstens eine Standardabweichung von Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(X) - \sigma(X) &\leq X \leq E(X) + \sigma(X) \\ 15{,}64 &\leq X \leq 24{,}36 \end{aligned}$$

... 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 ...

$$16 \leq X \leq 24$$

kleinstmögliche relative Häufigkeit:

$$h_{400}(16) = \frac{16}{400} = 0{,}04$$

größtmögliche relative Häufigkeit:

$$h_{400}(24) = \frac{24}{400} = 0{,}06$$

Zurück zur Aufgabe

d) Allgemein gilt für eine Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ folgende Ungleichung für $k > 0$:

$$P(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Erläutern Sie die Aussage dieser Ungleichung für $k = 2$. **(3BE)**

$P(\mu - 2 \cdot \sigma < X < \mu + 2 \cdot \sigma)$
beschreibt die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung des Werts einer Zufallsgröße um weniger als 2 Standardabweichungen um den Erwartungswert.
Diese Wahrscheinlichkeit beträgt mindestens $1 - \frac{1}{2^2} = 0{,}75 = 75\%$

Zurück zur Aufgabe

2. Um die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen eine nur in den Tropen auftretenden Pilz zu untersuchen, wurde ein Experiment mit 150 Pflanzen durchgeführt. Dabei wurden 70% der Pflanzen mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt und anschließend alle 150 Pflanzen mit den Sporen des tropischen Pilzes besprüht.
Am Ende des Experiments war die Anzahl der unbehandelten Pflanzen ohne Pilzbefall dreimal so groß wie die Anzahl x der behandelten Pflanzen mit Pilzbefall. Insgesamt wurden 19 Pflanzen vom tropischen Pilz befallen. Aus den 150 Pflanzen wird eine Pflanze zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
S: „Die Pflanze wurde mit dem Pflanzenschutzmittel behandelt.“
T: „Die Pflanze wurde vom tropischen Pilz befallen.“

a) Bestimmen Sie x unter Zuhilfenahme einer Vierfeldertafel. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $x = 13$)

	S	$\bar{S}$	
T	x	$19 - x$	19
$\bar{T}$	$131 - 3x$	$3x$	131
	105	45	150

$0{,}70 \cdot 150 = 105$

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} 19 - x + 3x &= 45 && \vert -19 \\ 2x &= 26 && \vert :2 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} x + 131 - 3x &= 105 && \vert -131 \\ -2x &= -26 && \vert :(-2) \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

b) Berechnen Sie $P_S(T)$ und $P_{\bar{S}}(T)$ und begründen Sie, dass aus den Ergebnissen des Experiments nicht auf die Wirksamkeit des Pflanzenschutzmittels gegen den tropischen Pilz geschlossen werden kann. **(4BE)**

	S	$\bar{S}$	
T	13	6	19
$\bar{T}$	92	39	131
	105	45	150

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{13}{105} \approx 0{,}124 = 12{,}4\%$$

$$P_{\bar{S}}(T) = \frac{P(\bar{S} \cap T)}{P(\bar{S})} = \frac{6}{45} \approx 0{,}133 = 13{,}3\%$$

Der Anteil an Pflanzen, die vom tropischen Pilz befallen sind, ist unter den mit Pflanzenschutzmittel behandelten Pflanz nur geringfügig kleiner als unter den nichtbehandelten Pflanzen. Das Mittel hat also bestenfalls eine geringe Wirksamkeit.

Zurück zur Aufgabe

Stochastik Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil B) **LÖSUNG**

Die SMV eines Gymnasiums initiierte im vergangenen Schuljahr die Aktionen „Baumpatenschaft“ und „Umweltwoche“.

1. Mit einer Umfrage auf dem Schulfest wird der Bekanntheitsgrad der beiden Aktionen ermittelt. Von den Befragten kennt jeder Fünfte die Aktion „Baumpatenschaft“. 24% der Befragten kennen keine der beiden Aktionen; die Aktion „Umweltwoche“ kennen 30% der Befragten nicht.
Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:
B: „Die Person kennt die Aktion ‚Baumpartnerschaft‘.“
U: „Die Person kennt die Aktion ‚Umweltwoche‘.“

a) Weisen Sie nach, dass der Ereignisse B und U stochastisch unabhängig sind. **(4BE)**

$P(B) = \frac{1}{5} = 0{,}20$; $P(\bar{B} \cap \bar{U}) = 0{,}24$; $P(\bar{U}) = 0{,}30$;

1. Möglichkeit: Vierfeldertafel

	B	$\bar{B}$	
U	0,14	0,56	0,70
$\bar{U}$	0,06	0,24	0,30
	0,20	0,80	1

$$\begin{aligned} P(U) &= 0{,}70 \\ P(B) &= 0{,}20 \\ P(U) \cdot P(B) &= 0{,}70 \cdot 0{,}20 = 0{,}14 = P(U \cap B) \end{aligned}$$

→ B und U sind stochastisch unabhängig.

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} P(B) &= 0{,}20 \\ \rightarrow P(\bar{B}) &= 0{,}80 \\ P(\bar{U}) &= 0{,}30 \\ P(\bar{U}) \cdot P(\bar{B}) &= 0{,}30 \cdot 0{,}80 = 0{,}24 = P(\bar{U} \cap \bar{B}) \end{aligned}$$

→ B und U sind stochastisch unabhängig.

Zurück zur Aufgabe

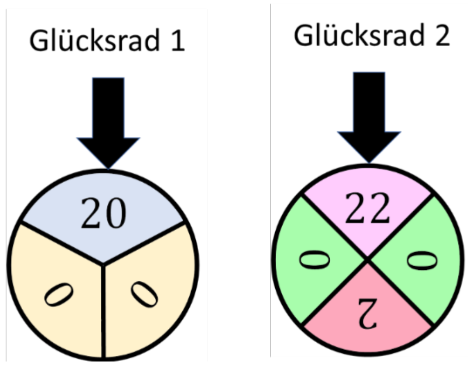
b) Geben Sie für den Fall, dass die ausgewählte Person die Aktion „Baumpartnerschaft“ kennt, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie die Aktion „Umweltwoche“ nicht kennt. **(1BE)**

	B	$\bar{B}$	
U	0,14	0,56	0,70
$\bar{U}$	0,06	0,24	0,30
	0,20	0,80	1

$$P_B(\bar{U}) = \frac{P(B \cap \bar{U})}{P(B)} = \frac{0{,}06}{0{,}20} = 0{,}30$$

Zurück zur Aufgabe

2. Um Geld für die beiden Aktionen einzunehmen, bietet die SMV auf dem Schulfest das Spiel „2022" an. Bei dem Spiel werden zwei Glücksräder mit drei bzw. vier gleich großen Sektoren verwendet, die wie in Abbildung 1 beschriftet sind. Für einen Einsatz von 3€ darf man jedes der beiden Glücksräder einmal drehen. Für jede Ziffer 2, die auf den erzielten Sektoren steht, werden 2€ ausbezahlt. Die Zufallsgröße Z beschreibt, wie oft die Ziffer 2 auf den erzielten Sektoren insgesamt vorkommt.



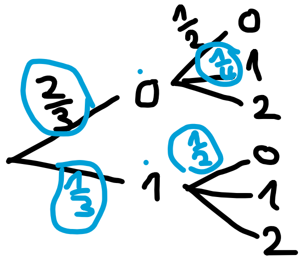


Abb. 1

a) Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2. **(3BE)**

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	p_1	p_2	$\frac{1}{12}$

(zur Kontrolle: $p_2 = \frac{1}{4}$)

$$p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

1. Möglichkeit

$$p_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

2. Möglichkeit

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aus der Tabelle muss 1 ergeben.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + p_2 + \frac{1}{12} &= 1 \\ p_2 + \frac{9}{12} &= 1 \qquad \left| -\frac{9}{12} \right. \\ p_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

b) Ermitteln Sie, wie viele Spiele durchgeführt werden müssen, damit der Erwartungswert der Einnahme für die beiden Aktionen 300€ beträgt. **(4BE)**

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Einsatz: 3€;
Einnahme bei 0 Treffern: 0€ → -3€ Verlust
Einnahme bei 1 Treffer: 2€ → -1€ Verlust
Einnahme bei 2 Treffern: 4€ → $+1$€ Gewinn
Einnahme bei 3 Treffern: 6€ → $+3$€ Gewinn

Wir erstellen eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße
X: "Gewinn/Verlust in € pro Spiel für einen Spieler."

$X=x$	-3	-1	$+1$	$+3$
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert für ein Spiel:

$$E(X) = -3 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} = -\frac{5}{6}$$

$\frac{5}{6}$€ ist der Betrag den ein Teilnehmer im Mittel pro Spiel verliert.

$$\rightarrow n \cdot \frac{5}{6} = 300 \quad | \cdot \frac{6}{5}$$
$$n = 360$$

Zurück zur Aufgabe

Acht Personen spielen nacheinander jeweils einmal das Spiel „2022“.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die SMV mehr als zweimal mindesten 4€ ausbezahlen muss. **(4BE)**

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Mindestens 4€ muss bei 2 Mal Ziffer 2 oder 3 Mal Ziffer 2 gezahlt werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist pro Spiel $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

$$P(\text{„mehr als 2x mind. 4€“}) = \sum_{i=3}^{8} B\left(8; \frac{1}{3}; i\right)$$
$$= 1 - \sum_{i=0}^{2} B(8; \frac{1}{3}; i)$$
TW
$$= 1 - 0{,}46822$$
$$= 0{,}53178$$

Zurück zur Aufgabe

n	k	$p = \frac{1}{3}$	
		$B(n;p;k)$	$\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$
8	0	0,03902	0,03902
	1	0,15607	0,19509
	2	0,27313	0,46822
	3	0,27313	0,74135
	4	0,17071	0,91206
	5	0,06828	0,98034
	6	0,01707	0,99741
	7	0,00244	0,99985
	8	0,00015	1,00000

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an die ersten drei Personen drei unterschiedliche Beträge ausbezahlt werden, die in der Summe 12€ ergeben.

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Mögliche Beträge: 0€; 2€; 4€; 6€;
Die einzige mögliche Kombination für den erwünschten Betrag ergibt sich folgendermaßen:
$2€ + 4€ + 6€ = 12€$
Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Spielrunden einmal 2€, einmal 4€ und einmal 6€ gewonnen werden.

$P(\text{"2€, 4€ und 6€"}) = 3! \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$

2€	4€	6€
2€	6€	4€
4€	2€	6€
4€	6€	2€
6€	4€	2€
6€	2€	4€

Es gibt $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ viele mögliche Gewinnreihenfolgen.

Zurück zur Aufgabe

3. Die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 8$ und p_x besitzt die Standardabweichung $\frac{4}{3}$. In Abbildung 2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

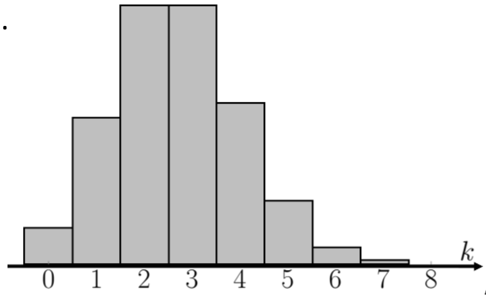


Abb. 2

a) Ermitteln Sie den Wert des Parameters p_x. **(4BE)**

Für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt:

$E(X) = n \cdot p$

$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$\frac{4}{3} = \sqrt{8 \cdot p \cdot (1-p)} \quad |^2$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 8 \cdot p \cdot (1-p)$$

$$\frac{16}{9} = 8p - 8p^2 \quad \left| -\frac{16}{9}\right.$$

$$0 = -8p^2 + 8p - \frac{16}{9}$$

$$p_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-8) \cdot \left(-\frac{16}{9}\right)}}{2 \cdot (-8)}$$

$p_1 = \frac{1}{3}$; $p_2 = \frac{2}{3}$;

Betrachtet man die Verteilung, dann ist ersichtlich, dass $p < 0{,}5$ sein muss. → $p_1 = \frac{1}{3}$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Zurück zur Aufgabe

b) Die binomialverteilte Zufallsgröße Y hat die Parameter $n = 8$ und $p_Y = 1 - p_x$. Kennzeichnen Sie in Abbildung 2 eine Fläche, die die Wahrscheinlichkeit $P(Y \geq 6)$ darstellt. **(2BE)**

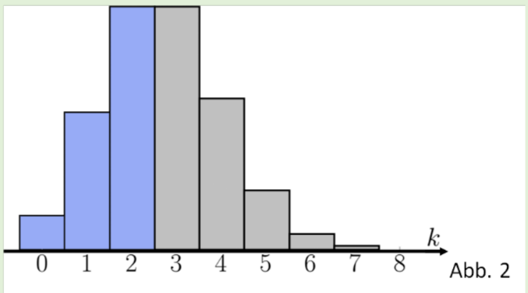


Abb. 2

Die Verteilung von Y entsteht indem die Verteilung von X an der Achse gespiegelt wird, die senkrecht zur k-Achse an der Stelle 4 ist. Also gilt:

$P(X = 0) = P(Y = 8)$, $P(X = 1) = P(Y = 7)$, $P(X = 2) = P(Y = 6)$ usw.

→ $P(Y \geq 6) = P(X \leq 2)$

Zurück zur Aufgabe

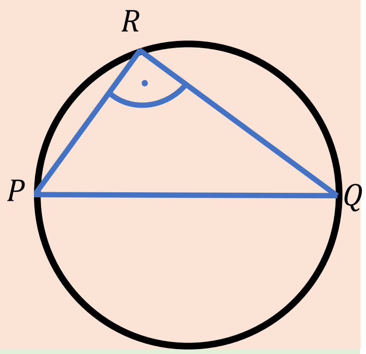
Geometrie Aufgabengruppe 1 (Prüfungsteil B) **LÖSUNG**

Gegeben sind die Punkte $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$, die in der Ebene E liegen, sowie die Gerade $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix}-12\\11\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke $[PQ]$. Zeigen Sie, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist, und begründen Sie damit, dass die Strecke $[PQ]$ Durchmesser des Umkreises des Dreiecks PQR ist. **(4BE)** *(zur Kontrolle: $E\colon 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$)*

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PQ}| &= \left|\begin{pmatrix}5\\9\\-18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\-19\end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{1^2+4^2+1^2} \\
&= \sqrt{18}\ [\mathrm{LE}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR} \circ \overrightarrow{RQ} &= \left(\begin{pmatrix}3\\7\\-17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\-19\end{pmatrix}\right) \circ \left(\begin{pmatrix}5\\9\\-18\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\7\\-17\end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\
&= -2 + 4 - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$



Zeichnet man einen Kreis um die Strecke $[PQ]$, dann ist jedes Dreieck mit den Eckpunkten P, Q und S, wobei S ein Punkt auf dem Kreis ist, nach dem Satz des Thales rechtwinklig. Alle sonstigen Dreiecke mit den Eckpunkten P, Q und T, wobei T nicht auf dem Kreis liegt, sind demnach nicht rechtwinklig. Also liegt R auf dem Kreis, der damit auch der Umkreis ist.

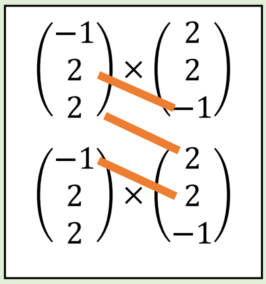
Zurück zur Aufgabe

b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Gerade g in E liegt. **(5BE)** *(zur Kontrolle:* $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$*)*

$P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$, $R(3|7|-17)$, $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

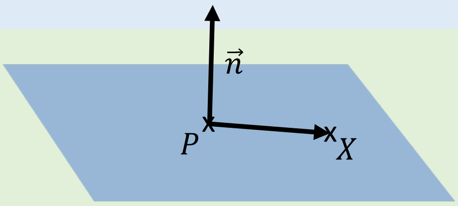
Wir bestimmen die Koordinaten eines Normalenvektors.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{RQ} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\ &= -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



1. Möglichkeit:
Wir bilden mithilfe eines Normalenvektors die Normalenform und setzen die Koordinaten eines Punktes z.B. $P(4|5|-19)$ ein.

$$\begin{aligned} E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ E: 2(x_1 - 4) - 1 \cdot (x_2 - 5) + 2 \cdot (x_3 + 19) &= 0 \\ E: 2x_1 - 8 - x_2 + 5 + 2x_3 + 38 &= 0 \\ E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 &= 0 \end{aligned}$$



2. Möglichkeit:
Wir setzen die Koordinaten eines Normalenvektors in die Koordinatenform ein.

$E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + d = 0$

Um d zu bestimmen setzen wir die Koordinaten eines Punktes z.B. $P(4|5|-19)$ ein.

$$\begin{aligned} E: 2 \cdot 4 - 5 + 2 \cdot (-19) + d &= 0 \\ -35 + d &= 0 \qquad | +35 \\ d &= 35 \\ \rightarrow E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 &= 0 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass g in E liegt setzen wir allgemein die Koordinaten von g in E ein.

$$\begin{aligned} E: 2 \cdot (-12 + \lambda) - (11 + 2\lambda) + 2 \cdot (0 + 0\lambda) - 35 &= 0 \\ 24 - 2\lambda + 11 + 2\lambda - 0 - 35 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

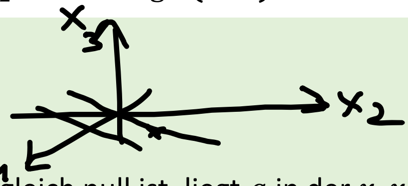
→ alle Punkte von g liegen in E → g liegt in E.

.

Zurück zur Aufgabe

c) Begründen Sie ohne Rechnung, dass g in der x_1x_2-Ebene liegt. **(1BE)**

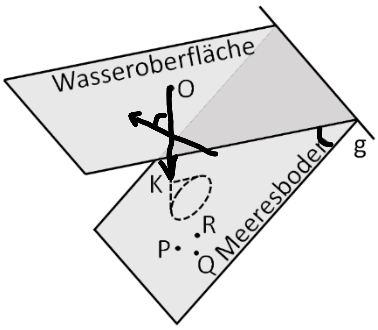
$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Da die x_3-Koordinate von jedem Punkt, der auf g liegt gleich null ist, liegt g in der x_1x_2-Ebene.

Zurück zur Aufgabe

In einem Modell für einen Küstenabschnitt am Meer beschreibt die x_1x_2-Ebene die horizontale Wasseroberfläche und die Gerade g die Uferlinie. Die Ebene E stellt im betrachteten Abschnitt den Meeresboden dar. Eine Boje schwimmt auf der Wasseroberfläche an der Stelle, die dem Koordinatenursprung O entspricht (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Realität.



d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Meeresboden gegenüber der Wasseroberfläche abfällt. **(3BE)**

Der Winkel zwischen zwei Ebenen kann mithilfe der Normalenvektoren der Ebenen bestimmt werden.

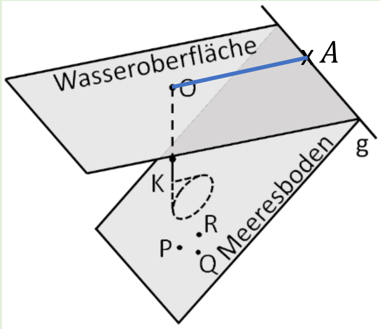
Ein Normalenvektor zur x_1x_2-Ebene ist $\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor zur Ebene E wurde in Aufgabe **c)** bestimmt.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3} \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \\ &\approx 48{,}19° \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

Ein Fotograf soll für ein Reisemagazin Unterwasserfotos aufnehmen.

e) Der Fotograf schwimmt entlang der kürzestmöglichen Strecke von der Uferlinie aus zur Boje. Ermitteln Sie die Länge dieser Strecke. **(4BE)**



Wir wählen einen allgemeinen Punkt A auf g. Um die kürzestmögliche Strecke zu erhalten muss nun der Vektor $\overrightarrow{0A}$ senkrecht auf g stehen.

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -12 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -12 + \lambda \\ 11 + 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit der Vektor $\overrightarrow{0A}$ senkrecht zur Geraden g liegt, muss das Skalarprodukt aus $\overrightarrow{0A}$ und dem Richtungsvektor von g null sein.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{0A} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} -12 + \lambda \\ 11 + 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
1 \cdot (-12 + \lambda) + 2 \cdot (11 + 2\lambda) &= 0 \\
-12 + \lambda + 22 + 4\lambda &= 0 \\
5\lambda + 10 &= 0 \\
5\lambda &= -10 \\
\lambda &= -2
\end{aligned}$$

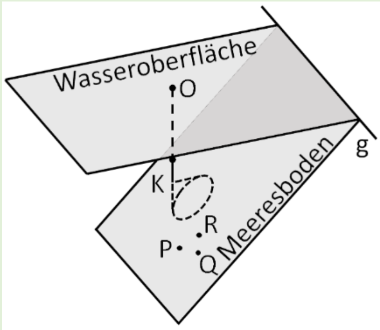
$$\rightarrow \overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} -12 - 2 \\ 11 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{0A}| &= \left| \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{(-14)^2 + 7^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{245} \\
&= 7\sqrt{5} \approx 15{,}65 \text{ [m]}
\end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

Von der Boje aus taucht der Fotograf senkrecht bezüglich der Wasseroberfläche nach unten bis zu einer Stelle, deren Abstand zum Meeresboden genau drei Meter beträgt und im Modell durch den Punkt K darstellt wird.

f) Bestimmen Sie rechnerisch, welche Tiefe unter der Wasseroberfläche der Fotograf bei diesem Tauchvorgang erreicht. **(5BE)**



$E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 35 = 0$
Zunächst erstellen wir die Gleichung der Geraden h, die senkrecht zur Wasseroberfläche steht und durch den Punkt 0 geht. Da Wasseroberfläche in unserem Schaubild in der x_1x_2-Ebene liegt, beschreibt $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ einen Normalenvektor zu dieser Ebene. → $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Um den Punkt auf der Gerade zu finden, der genau 3 Längeneinheiten von der Ebene E entfernt ist, bilden wir die Hesse`sche Normalenform (HNF) der Ebene E. Damit man eine Aussage über die Lage der möglichen Ergebnisse machen kann, muss ein Normalenvektor gewählt werden, der vom Ursprung zur Ebene hin zeigt. Anhand der Zeichnung kann man erkennen, dass die x_3-Koordinate dafür negativ sein muss. Wir wählen also $\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$

→ $E: \frac{-2x_1+x_2-2x_3-35}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}} = 0$

$E: \frac{-2x_1+x_2-2x_3-35}{3} = 0$

Setzt man die Koordinaten eines Punktes in der HNF einer Ebene ein, so gibt der Betrag dieses Wertes den Abstand zur Ebene. Wir wissen das der Abstand 3 sein muss und können deswegen mithilfe der HNF den zugehörigen Punkt bestimmen.

$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{-2x_1 + x_2 - 2x_3 - 35}{3}\right| \\ 3 &= \left|\frac{-2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot \lambda - 35}{3}\right| \\ 3 &= \left|\frac{-2 \cdot \lambda - 35}{3}\right| \qquad | \cdot 3 \\ 9 &= |-2 \cdot \lambda - 35| \end{aligned}$$

Ist der Wert im Betrag kleiner als 0, dann liegen der Ursprung und der Punkt auf derselben Seite der Ebene.
Ist der Wert im Betrag größer als 0, dann liegen der Ursprung und der Punkt auf unterschiedlichen Seiten der Ebene.

$$\begin{aligned} \rightarrow -2 \cdot \lambda - 35 &= -9 \qquad | + 35 \\ -2\lambda &= 26 \\ \lambda &= -13 \end{aligned}$$

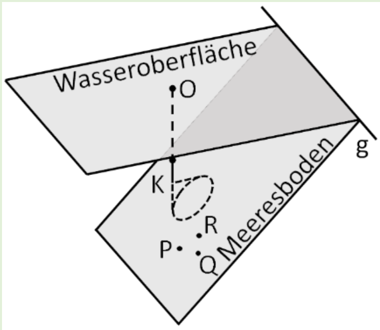
→ Der Fotograf erreicht eine Tiefe von 13 Metern.

Zurück zur Aufgabe

Hügel-Schule BY HÜGEL RUDOLF
WIR BRINGEN DICH ÜBER DEN BERG

g) Drei kleine farbenfrohe Seesterne befinden sich am Meeresboden und werden im Modell durch die Punkte P, Q und R dargestellt. Der Fotograf bewegt sich für seine Aufnahmen von der Stelle aus, die im Modell durch den Punkt K beschrieben wird, parallel zum Meeresboden. Das Kameraobjektiv zeigt dabei senkrecht zum Meeresboden und hat ein kegelförmiges Sichtfeld mit einem Öffnungswinkel von 90° (vgl. Abbildung). Beurteilen Sie, ob der Fotograf auf diese Weise eine Stelle erreichen kann, an der er alle drei Seesterne gleichzeitig im Sichtfeld der Kamera sehen kann. **(3BE)**

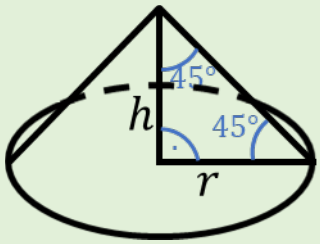
Aus der Angabe ist bekannt: $P(4|5|-19)$, $Q(5|9|-18)$ und $R(3|7|-17)$
Aus Aufgabe f) ist bekannt: $K(0|0|-13)$



Da wir K kennen, wissen wir, dass der zugehörige Kegel eine Höhe von 3 hat. Der Winkel zwischen Höhe und Mantellinie des Kegels beträgt $\frac{90°}{2} = 45°$.

1. Möglichkeit:
Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, bilden der zugehörige Radius der Grundfläche, die Höhe des Kegels und jede Mantellinie ein gleichschenkliges Dreieck. Deswegen gilt $3 = h = r$.
Der Durchmesser ist damit $d = 2 \cdot 3$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} < 6 = d$



Der Durchmesser des Kegels ist größer als der Abstand von $[PQ]$, also größer als der Umkreis von $[PQ]$. Damit gibt es eine Stelle an der der Kameramann alle drei Seestern sehen kann.

2. Möglichkeit:
Für den Radius des Kreises gilt

$\tan(45°) = \frac{r}{3}$

$r = 3 \cdot \tan(45°) = 3$

Der Durchmesser ist damit $d = 2 \cdot 3$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} < 6 = d$

Der Durchmesser des Kegels ist größer als der Abstand von $[PQ]$, also größer als der Umkreis von $[PQ]$. Damit gibt es eine Stelle an der der Kameramann alle drei Seesterne sehen kann.

Zurück zur Aufgabe

Geometrie Aufgabengruppe 2 (Prüfungsteil B) **LÖSUNG**

Die Abbildung 1 zeigt das sogenannte Saarpolygon, ein im Inneren begehbares Denkmal zur Erinnerung an den stillgelegten Kohlebergbau im Saarland. Das Saarpolygon kann in einem Koordinatensystem modellhaft durch den Streckenzug dargestellt werden, der aus den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ mit $A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ und $D(-11|-11|0)$ besteht (vgl. Abbildung 2). A, B, C und D sind Eckpunkte eines Quaders. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Abb. 1

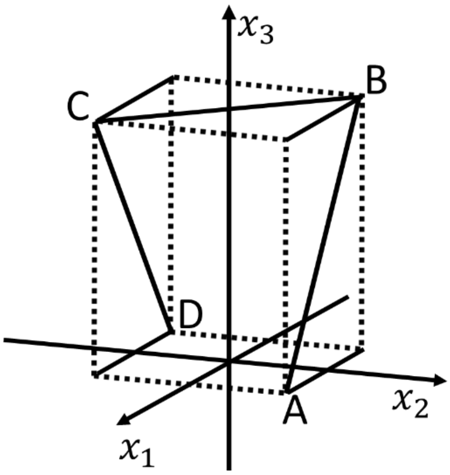


Abb.2

a) Begründen Sie, dass die Punkte B und C symmetrisch bezüglich der x_3-Achse liegen. **(2BE)**

Die x_1-Koordinaten und die x_2-Koordinate von B und C unterscheiden sich jeweils nur in ihrem Vorzeichen, während die x_3-Koordinate gleich ist.

Zurück zur Aufgabe

b) Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs in der Wirklichkeit. Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C, die Ebene F die Punkte B, C und D. **(3BE)**

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}-11\\11\\28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11\\11\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-22)^2+0^2+28^2} = 2\sqrt{317}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}11\\-11\\28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-11\\11\\28\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-22\\-22\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-22)^2+(-22)^2+(} = 22\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \left|\begin{pmatrix}-11\\-11\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11\\-11\\28\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-22\\0\\-28\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-22)^2+0^2+(-28} = 2\sqrt{317}$$

$$l = |\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{CD}| \approx 102{,}33\ [\text{m}]$$

Zurück zur Aufgabe

c) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$*)*

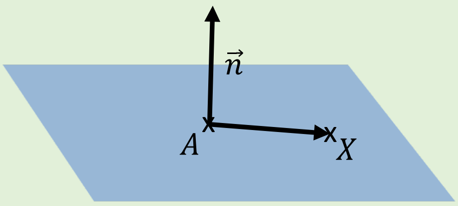
$A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$
Wir bestimmen zunächst einen Normalenvektor, um dann die Koordinatenform zu erhalten.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-22\\28\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 \cdot 28 - 28 \cdot (-22)\\ 28 \cdot 0 - (-22) \cdot 28\\ (-22) \cdot (-22) - 0 \cdot 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-28 \cdot (-22)\\ 22 \cdot 28\\ -22 \cdot (-22)\end{pmatrix}\\ &= 22 \cdot \begin{pmatrix}28\\28\\22\end{pmatrix}\\ &= 44 \cdot \begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-22\\28\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-22\\0\\28\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-22\\28\end{pmatrix}$$

1. Möglichkeit:
Wir bilden mithilfe eines Normalenvektors die Normalenform und setzen die Koordinaten eines Punktes z.B. $A(11|11|0)$ ein.

$$\begin{aligned}E: \begin{pmatrix}14\\14\\11\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}11\\11\\0\end{pmatrix}\right) &= 0\\ E: 14 \cdot (x_1 - 11) + 14 \cdot (x_2 - 11) + 11x_3 &= 0\\ E: 14x_1 - 154 + 14x_2 - 154 + 11x_3 &= 0\\ E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 - 308 &= 0\end{aligned}$$



2. Möglichkeit:
Wir setzen die Koordinaten eines Normalenvektors in die Koordinatenform ein.
$E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 + d = 0$
Um d zu bestimmen setzen wir die Koordinaten eines Punktes z.B. $A(11|11|0)$ ein.

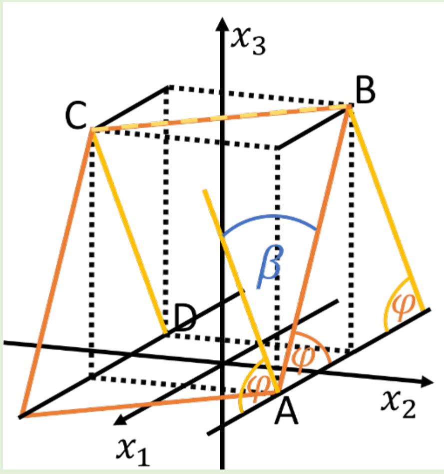
$$\begin{aligned}E: 14 \cdot 11 + 14 \cdot 11 + 11 \cdot 0 + d &= 0\\ 308 + d &= 0 \qquad |-308\\ d &= -308\\ \rightarrow E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 - 308 &= 0\end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

d) Berechnen Sie die Größe φ des Winkels, unter dem E die x_1x_2-Ebene schneidet. Geben Sie einen Term an, mit dem aus φ die Größe des Winkels zwischen der Ebene E und F berechnet werden kann. **(5BE)**

$A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$ liegen in E.
$B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$, $D(-11|-11|0)$ liegen in F.
$E: 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308$
Der Winkel zwischen zwei Ebenen kann mithilfe der Normalenvektoren der Ebenen bestimmt werden.

Ein Normalenvektor zur x_1x_2-Ebene ist $\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



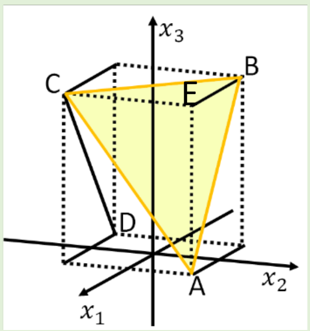
$$\rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{14^2+14^2+11^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}} \approx 0{,}48566$$

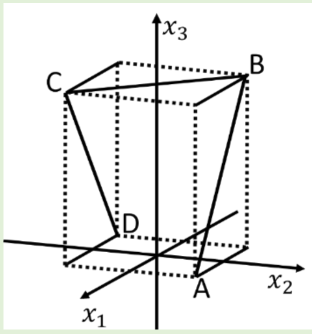
$\rightarrow \varphi = 67{,}72°$

$\rightarrow \beta = 180° - 2 \cdot \alpha$ (verlangt ist nur der Term)
$(= 180° - 2 \cdot 67{,}72° = 44{,}56°)$

Zurück zur Aufgabe

e) Die Ebene E teilt den Quader in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie den Anteil des Volumens des pyramidenförmigen Teilkörpers am Volumen des Quaders, ohne die Volumina zu berechnen.





Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide berechnet sich aus $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Die Grundfläche besteht dabei aus dem Dreieck CEB und die Höhe beschreibt die Länge der Strecke $[EA]$. Damit beträgt das Volumen der Pyramide genau $\frac{1}{3}$ des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und Höhe. Das Prisma wiederum beschreibt genau die Hälfte des Volumens des Quaders. $\rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \cdot V_{Quader}$.

Zurück zur Aufgabe

f) Das Saarpolygon wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet. Die Abbildungen 3 und 4 stellen das Saarpolygon für zwei Blickrichtungen schematisch dar.

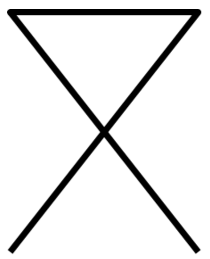


Abb. 3

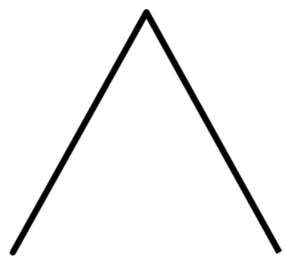


Abb. 4

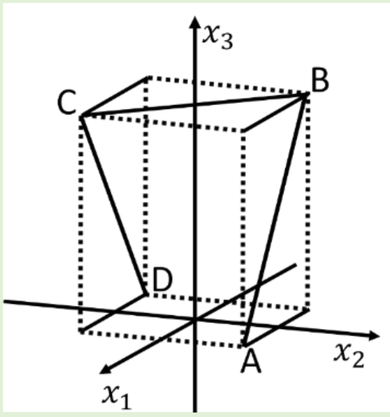
Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen 3 und 4 einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. Stellen Sie das Saarpolygon schematisch für eine Betrachtung von oben dar. **(4BE)**

Vektor zu Abbildung 3:

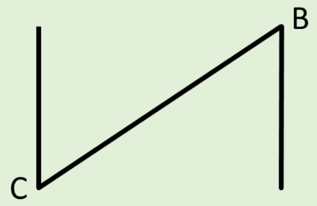
$$\vec{V}_{Abb.3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor zu Abbildung 4:

$$\vec{V}_{Abb.4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Das Saarpolygon von oben:



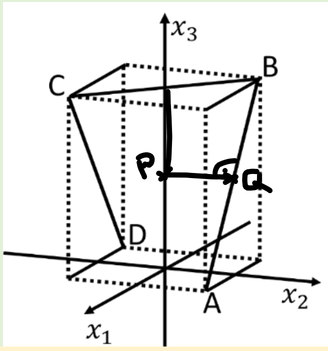
Zurück zur Aufgabe

g) Die Punkt $P(0|0|h)$ liegt innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken $[AB]$, $[BC]$ und $[CD]$ den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von h:

I $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, t \in [0; 1]$	II $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0$	III $\overline{PQ} = 28 - h$

Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von h zugrunde liegen. **(4BE)**

$A(11|11|0)$, $B(-11|11|28)$, $C(11|-11|28)$, $D(-11|-11|0)$



I $\vec{Q} = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$
Zunächst wird ein Punkt Q bestimmt, der auf der Strecke $[AB]$ liegt.

II $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{AB} = 0$
Gilt nun II, dann steht $[PQ]$ senkrecht auf $[AB]$.

III $\overline{PQ} = 28 - h$
Die Länge $\overline{PQ}$ beschreibt nun den Abstand von P zu $[AB]$. Dieser Abstand muss gleich dem Abstand von P zu $[BC]$ sein. Da die x_3-Koordinate von B und C gleich 28 LE sind, die der Abstand zu von P zu $[BC]$ genau $28 - h$.

Zurück zur Aufgabe