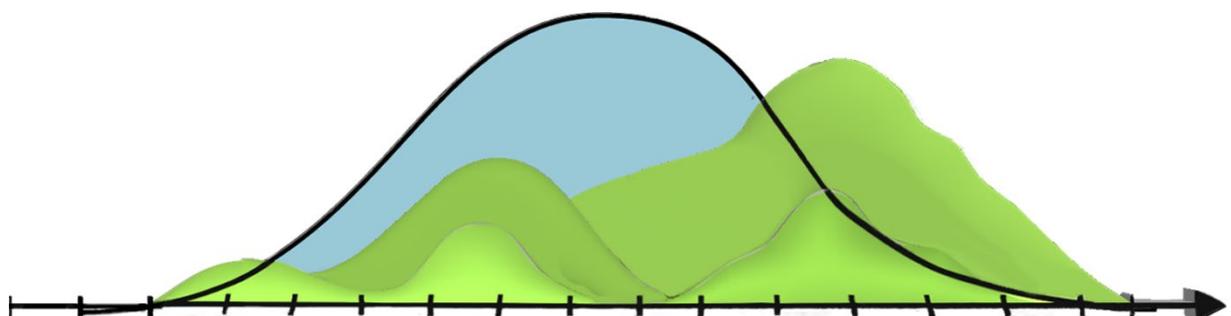


Arbeitsheft:

Elementare  
gebrochen-rationale  
Funktionen

Autor: Hügel Rudolf



## Inhaltsverzeichnis

01 Elementare gebrochen-rationale Funktionen .....	3
02 Wertemenge einer Funktion graphisch bestimmen .....	12
03 Hyperbeln: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.....	15
04 Hyperbeln: Verschiebung im Koordinatensystem.....	26
05 Indirekt proportionale Größen.....	33







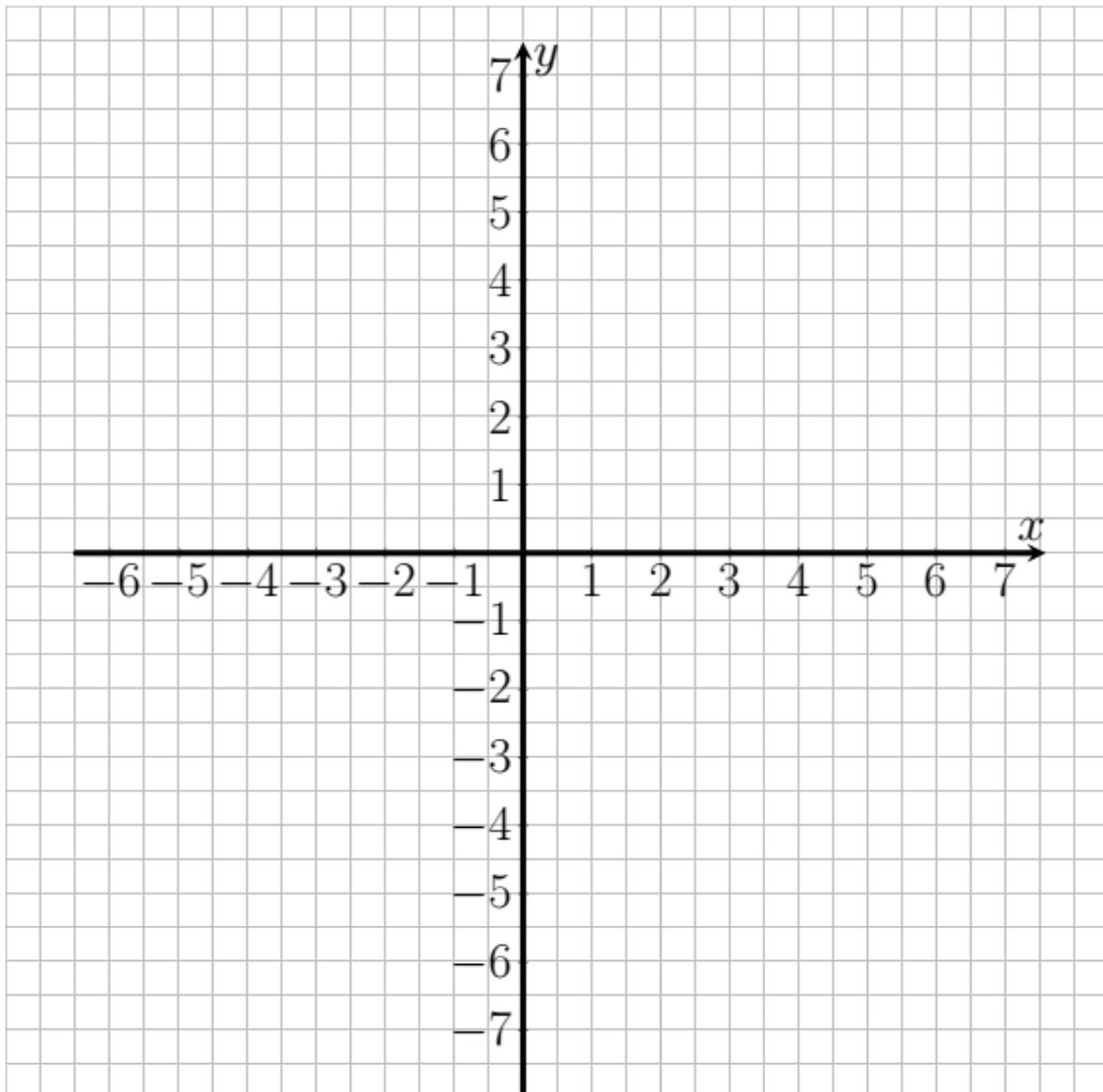
# 01 Elementare gebrochen-rationale Funktionen: Übungen

- d) Zeichne die Graphen der Funktionen  $f_1$  und  $f_3$ , mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und einer Wertetabelle, mit ganzzahligen  $x$ -Werten von  $-6$  bis  $6$ .

$$f_1(x) = \frac{2}{x-1} - 3 \quad f_3(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$													

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f_3(x)$													

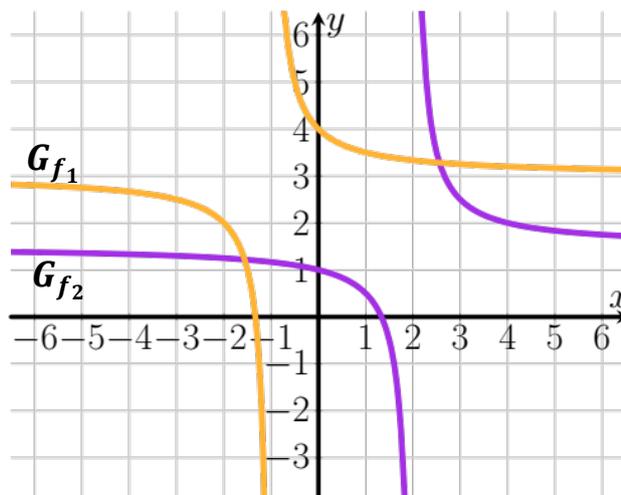


- e) Zeichne die Graphen mit Hilfe eines Funktionsplotters, um deine Ergebnisse zu überprüfen.



# 01 Elementare gebrochen-rationale Funktionen: Übungen

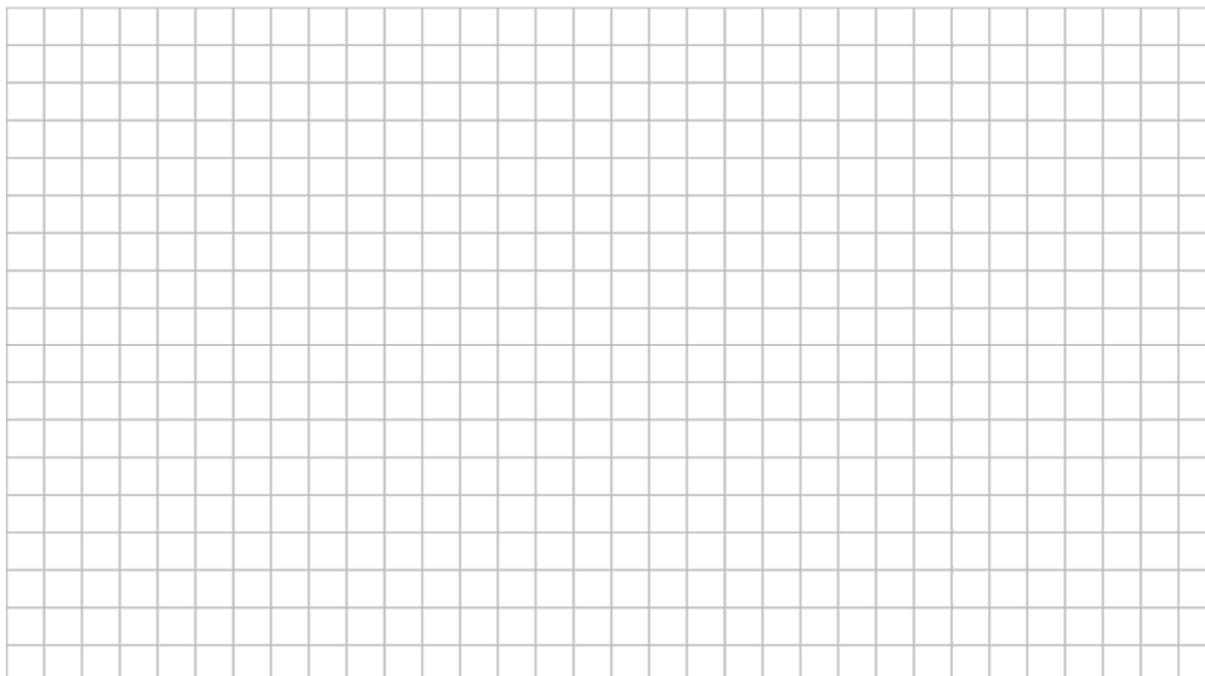
**Aufgabe 4:** Gegeben sind die folgenden Funktionsgraphen gebrochen-rationaler Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  der Form  $f: x \mapsto \frac{1}{x-b} + c$ . Zeichne die Asymptoten ein und bestimme mit Hilfe der Graphen jeweils den Funktionsterm.



**Aufgabe 5:** Gegeben ist im Folgenden die Wertetabelle einer gebrochen-rationalen Funktion  $f$ . Untersuche welche der Funktionsgleichungen zu  $f$  gehört.

x	-2	-1	0	1	2
y	-7	5	1	0,2	$-\frac{1}{7}$

(1)  $f(x) = \frac{2}{x-1,5} + 1$ ; (2)  $f(x) = \frac{3}{x+1,5} - 1$ ;



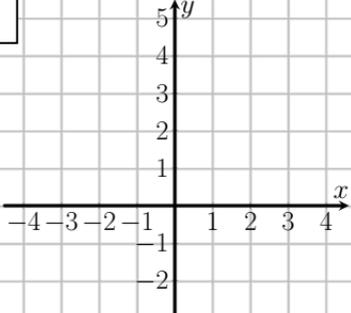
# 01 Elementare gebrochen-rationale Funktionen: Übungen

**Aufgabe 6:** Gegeben sind im Folgenden jeweils zwei Gleichungen, durch die die Asymptoten einer gebrochen-rationale Funktion beschrieben werden können.

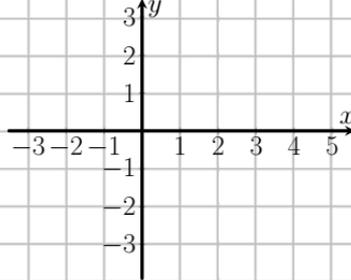
a)	$x = 1; y = 2;$	b)	$x = 1,5; y = -1;$	c)	$x = 3; y = -2$	d)	$x = -2; y = 1$
e)	$x = -3; y = 1,5;$	f)	$x = \frac{3}{4}; y = 2;$	g)	$x = -1; y = -1$	h)	$x = 2,25; y = 1$

- 1) Zeichne die Asymptoten jeweils in ein eigenes Koordinatensystem.
- 2) Zeichne jeweils eine Hyperbel ein, die die entsprechenden Asymptoten besitzt.
- 3) Gib jeweils die Funktionsgleichung einer gebrochen-rationale Funktion an, dessen Graph die entsprechenden Asymptoten besitzt.

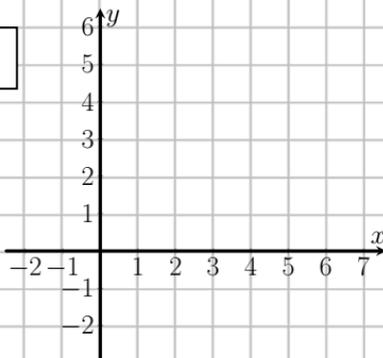
a)



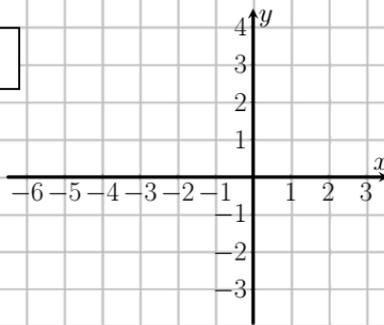
b)



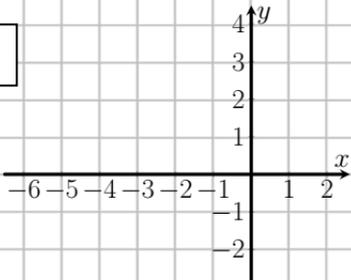
c)



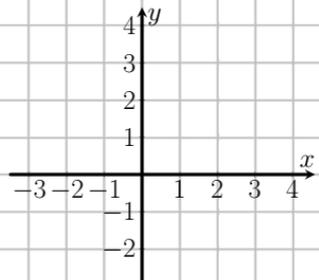
d)



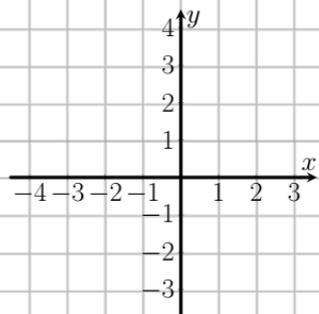
e)



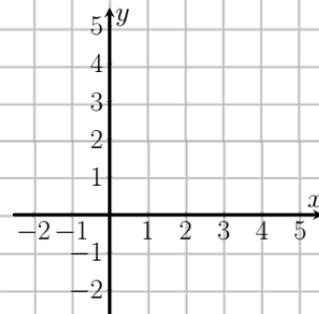
f)



g)



h)



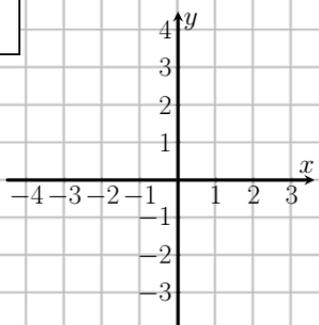
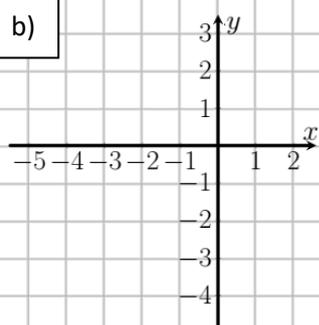
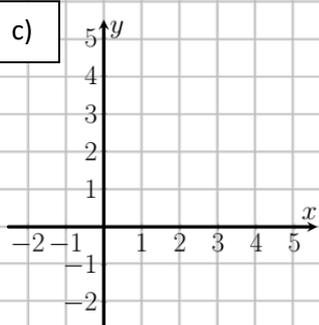
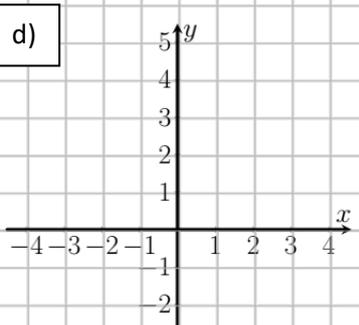


# 01 Elementare gebrochen-rationale Funktionen: Übungen

**Aufgabe 7:** Gegeben sind im Folgenden die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen Funktionen  $f_1$  bis  $f_4$ .

$f_1(x) = \frac{2}{x+1} + 1$	$f_2(x) = \frac{1}{x+2} - 1$	$f_3(x) = \frac{1}{x-3} + 1$	$f_4(x) = \frac{0,5}{(x-0,5)} - 1$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------------

- 1) Zeichne die Graphen der Funktionen jeweils in ein eigenes Koordinatensystem.
- 2) Entscheide jeweils, ob der Punkt  $P(1|0,5)$  über, unter oder auf dem Graphen der Funktionen liegt und schreibe deine Lösung auf.
- 3) Lies aus den Zeichnungen jeweils die Nullstellen der Funktion ab.
- 4) Lies aus den Zeichnungen jeweils den Schnittpunkt mit der y-Achse ab.

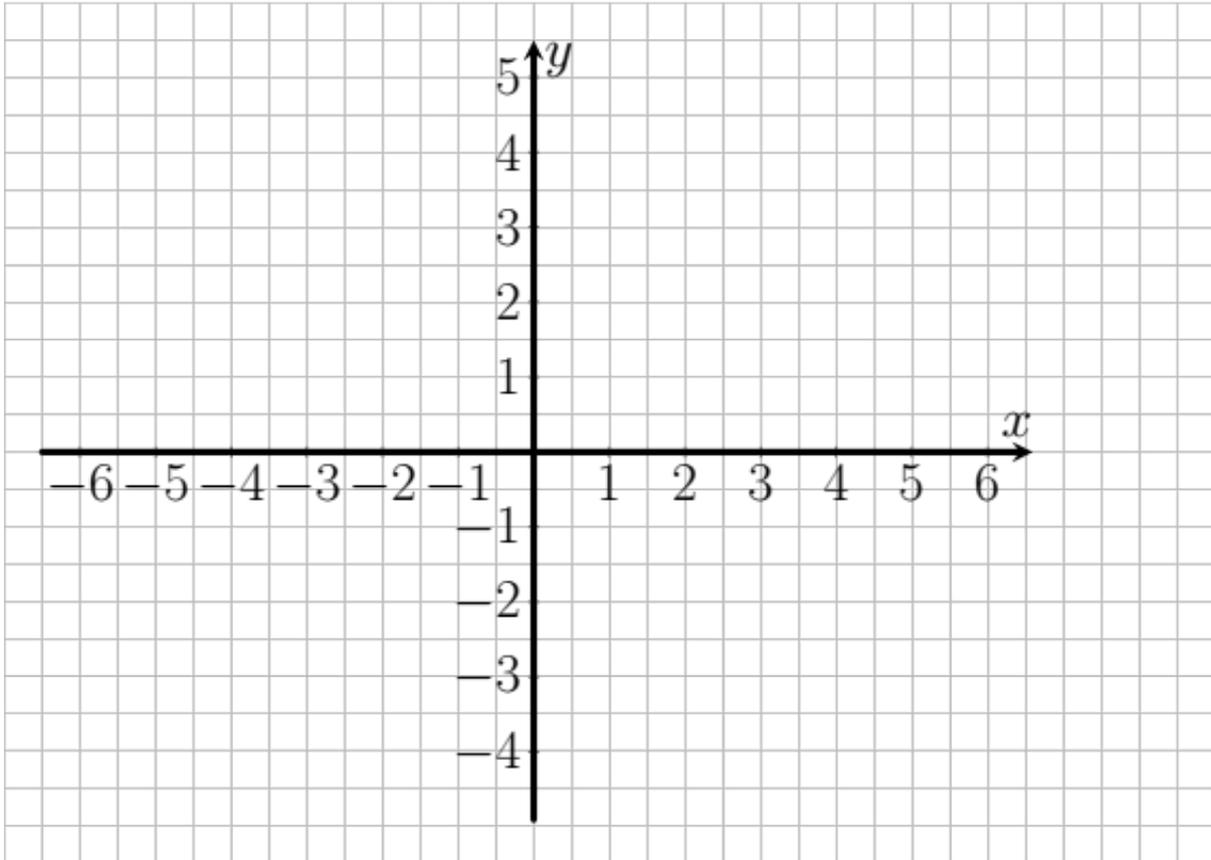
a)		Der Punkt $P(1 0,5)$ liegt _____ dem Graphen.  Nullstellen von $f_1$ : _____  Schnittpunkte mit der y-Achse vom Graphen von $f_1$ : _____
b)		Der Punkt $P(1 0,5)$ liegt _____ dem Graphen.  Nullstellen von $f_2$ : _____  Schnittpunkte mit der y-Achse vom Graphen von $f_2$ : _____
c)		Der Punkt $P(1 0,5)$ liegt _____ dem Graphen.  Nullstellen von $f_3$ : _____  Schnittpunkte mit der y-Achse vom Graphen von $f_3$ : _____
d)		Der Punkt $P(1 0,5)$ liegt _____ dem Graphen.  Nullstellen von $f_4$ : _____  Schnittpunkte mit der y-Achse vom Graphen von $f_4$ : _____



# 01 Elementare gebrochen-rationale Funktionen: Übungen

**Aufgabe 8:** Gegeben ist im Folgenden die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebene Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x-1} + 0,5$ .

a) Zeichne den Graphen  $G_f$  der Funktion  $f$  in das folgende Koordinatensystem.



b) Zeichne die waagrechte und senkrechte Asymptote von  $G_f$  ein.

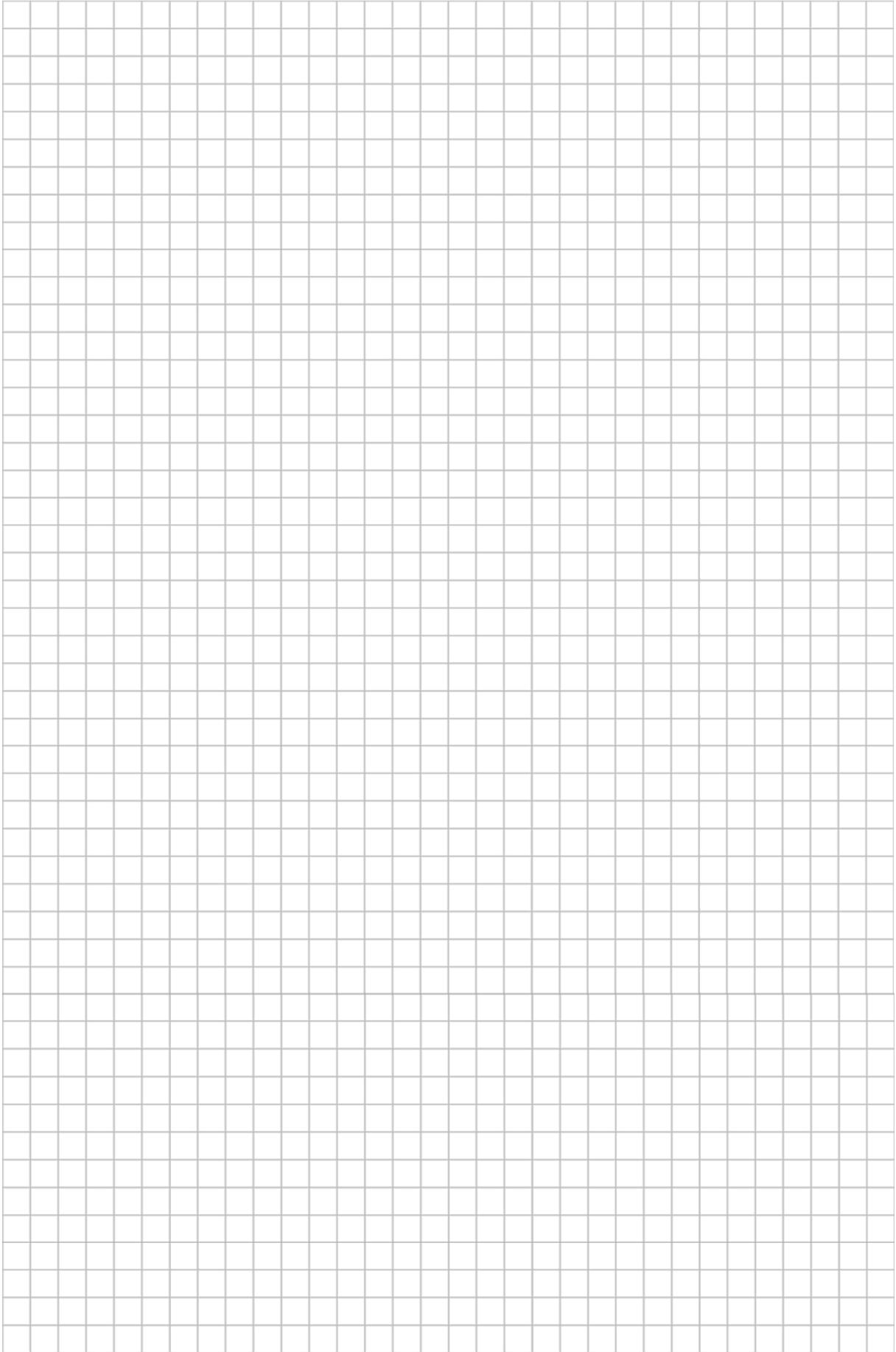
c) Entscheide zu welchem Punkt  $G_f$  punktsymmetrisch ist.



d) Gib allgemein die Symmetrieeigenschaft des Graphen einer Funktion  $g$  mit

$$g(x) = \frac{a}{x-b} + c \text{ an } (a \neq 0, b, c \in \mathbb{Q} \setminus \{-b\}).$$

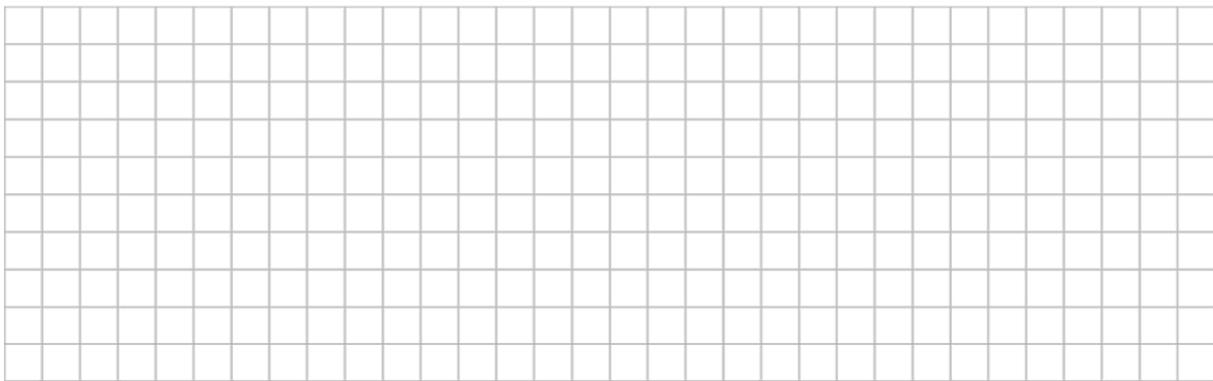
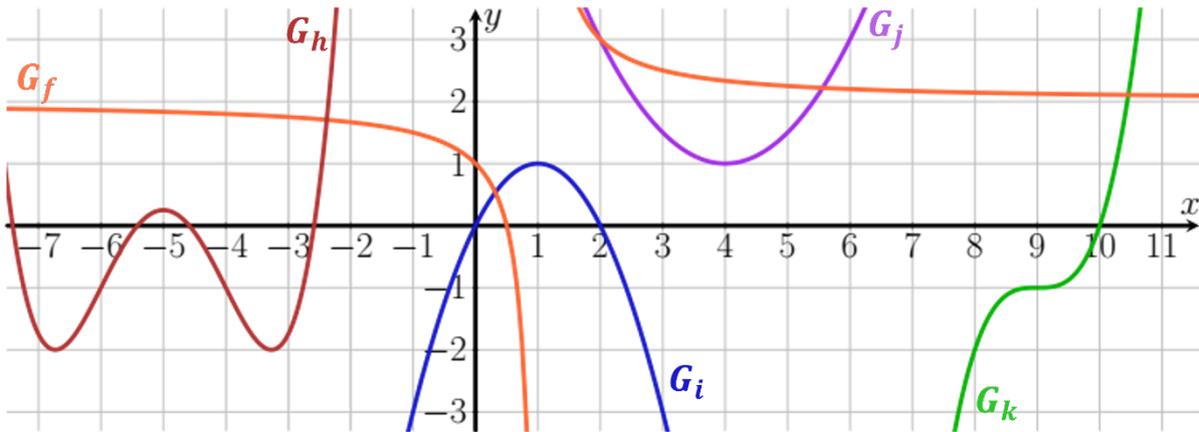






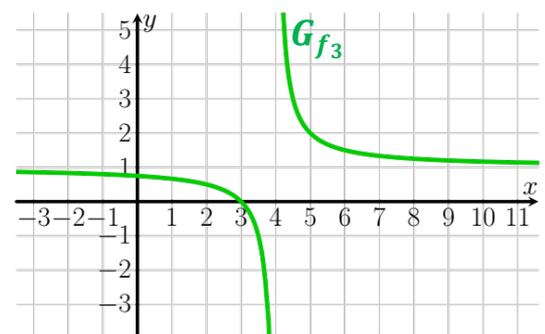
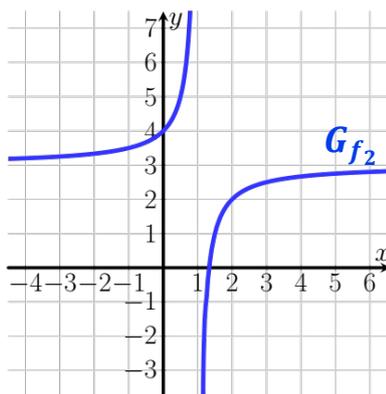
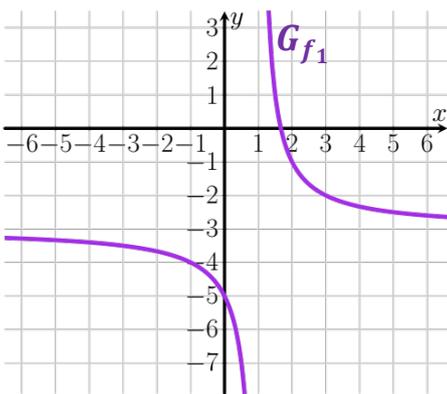
## 02 Wertemenge einer Funktion bestimmen: Übungen

**Aufgabe 1:** Gegeben sind die Graphen, der auf ganz  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f$ ,  $h$ ,  $i$ ,  $j$  und  $k$ . Gib mithilfe der Graphen jeweils die entsprechende Wertemenge der zugehörigen Funktion an.



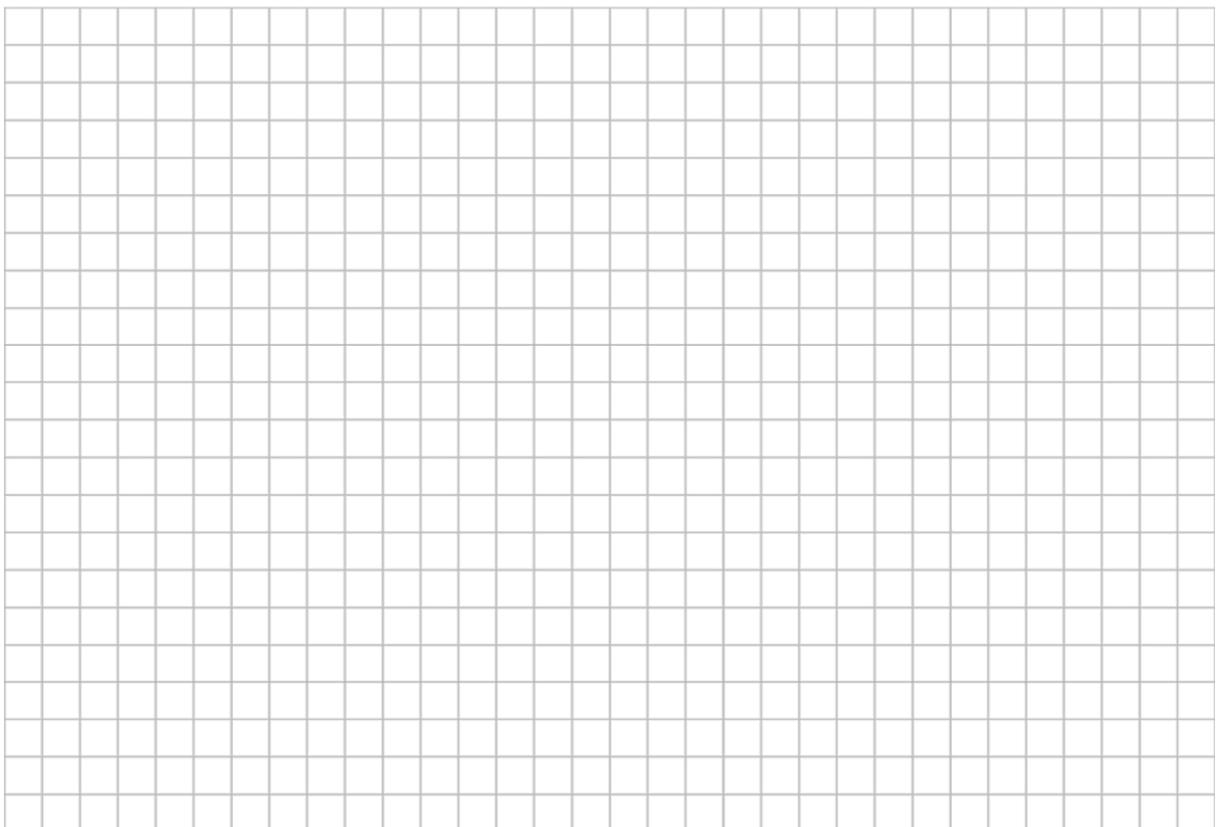
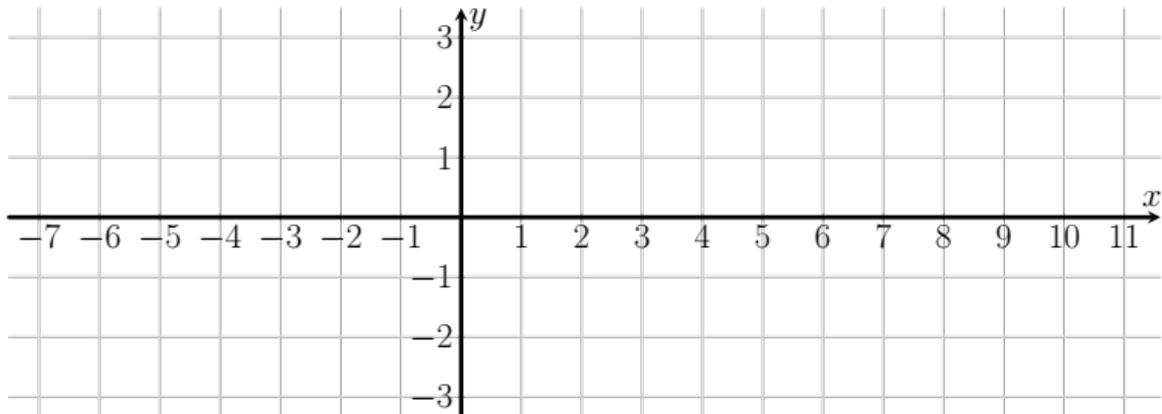
**Aufgabe 2:** Gegeben sind die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen Funktionen  $f_1$  bis  $f_3$  unter der Grundmenge  $\mathbb{Q}$ .

- Gib die maximale Definitionsmenge der jeweiligen Funktion an.
- Gib die Wertemenge der jeweiligen Funktion an.



## 02 Wertemenge einer Funktion bestimmen: Übungen

**Aufgabe 3:** Zeichne in das Koordinatensystem mindestens zwei Graphen von Funktionen und beschrifte diese. Lasse anschließend deinen Banknachbarn die Wertemenge der zugehörigen Funktion graphisch bestimmen.



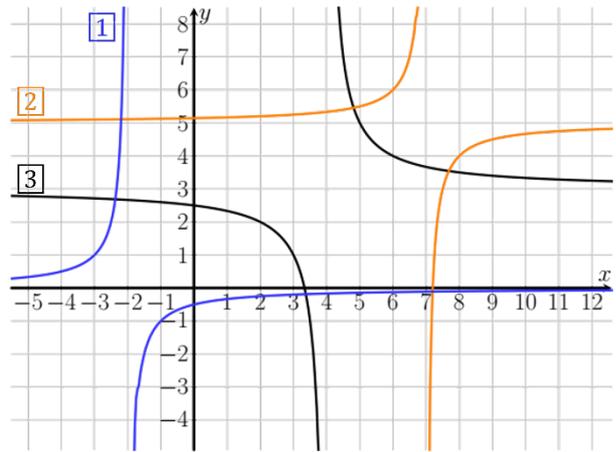


# 03 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von Hyperbeln: Übungen

**Aufgabe 1:** Gegeben sind im Folgenden drei Graphen von elementar gebrochen-rationalen Funktionen.



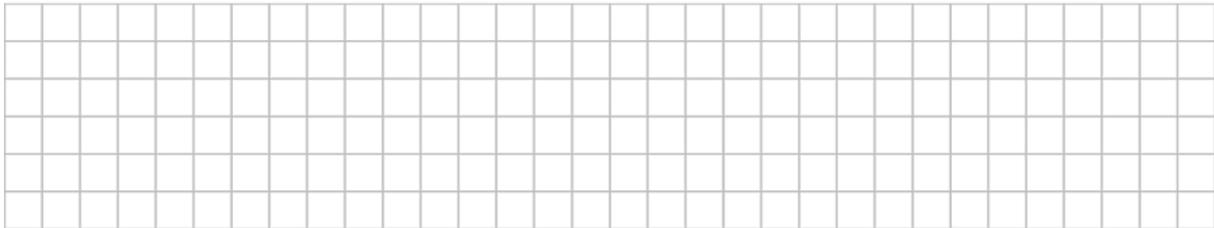
- a) Bestimme die Gleichungen der Asymptoten jedes Graphen graphisch. ([Hilfe dazu erhältst du durch Klicken auf den Text oder scannen des QR-Codes](#))



- b) Bestimme die Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen jedes Graphen graphisch.



- c) Bestimme die Wertemenge der Funktionen graphisch. ([Hilf dazu gibt es hier](#))



**Aufgabe 2:** Gegeben sind im Folgenden die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen Funktionen  $f_1$  bis  $f_8$ .

a)	$f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$	b)	$f_2(x) = \frac{1,5}{x-1} + 2$	c)	$f_3(x) = \frac{1}{x+1,5} - 0,5$	d)	$f_4(x) = -\frac{1}{x-1}$
e)	$f_5(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2x-4} + 4$	f)	$f_6(x) = \frac{0,1}{x} - \frac{1}{4}$	g)	$f_7(x) = \frac{3}{x-2} + 8$	h)	$f_8(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2x+6} + 4$

- (1) Gib die maximal mögliche Definitionsmenge an.









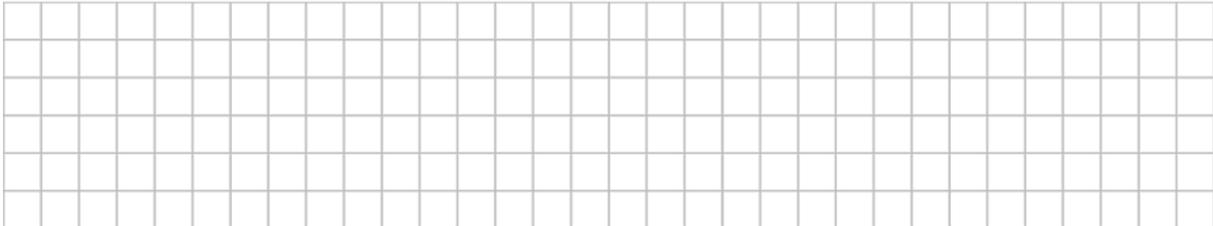


## 03 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von Hyperbeln: Übungen

- c) Der Graph von  $f$  schneidet die  $y$ -Achse an der Stelle  $y = 1$ , hat eine senkrechte Asymptote bei  $x = 1$  und eine waagrechte Asymptote bei  $y = -2$ .

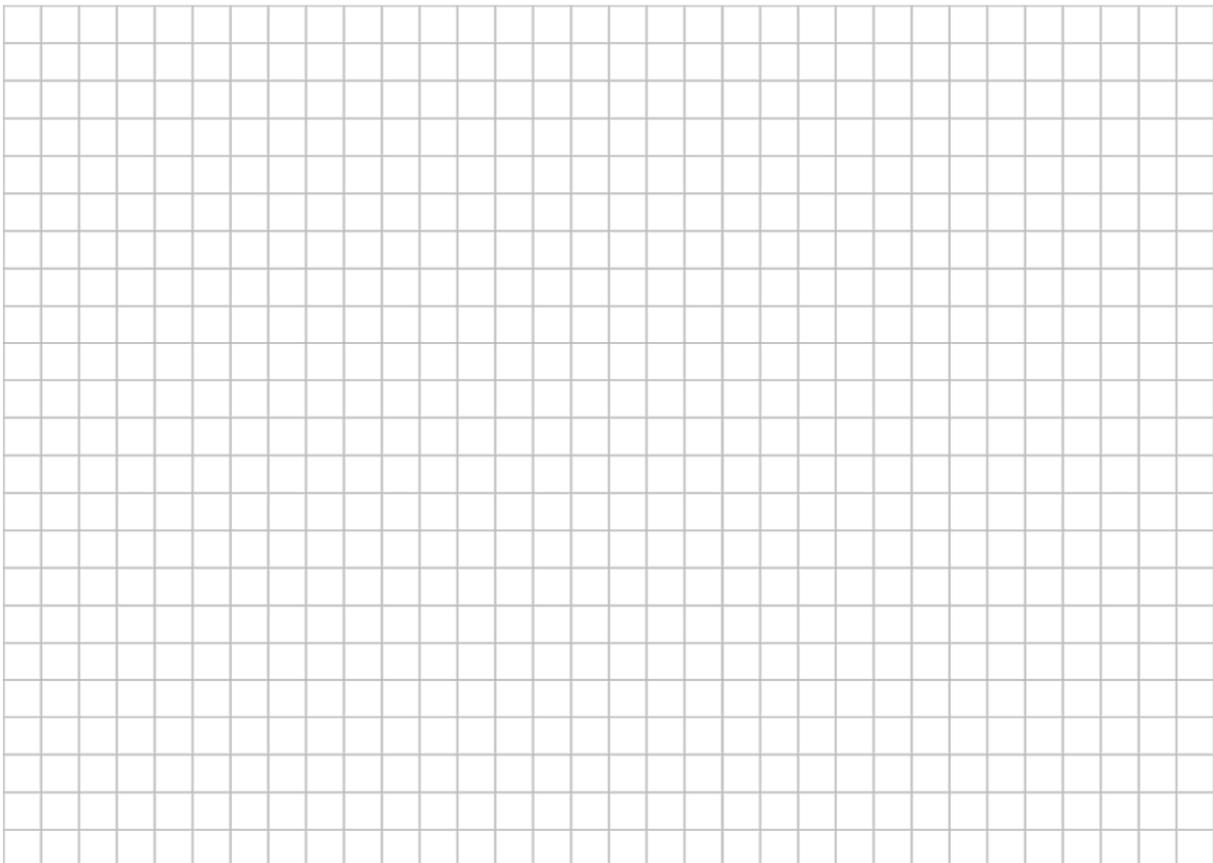


- d) Formuliere eine eigene Aufgabe, auf die Art wie a) bis c) gestellt sind, und löse diese.



**Aufgabe 7:** Gegeben sind die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen Funktionen  $f_1$  bis  $f_3$ . Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der jeweiligen Graphen der Funktionen, falls möglich. Gib eine fachliche Begründung für die Graphen an, für die dies nicht möglich ist. Verwende dabei den Begriff „Asymptote“.

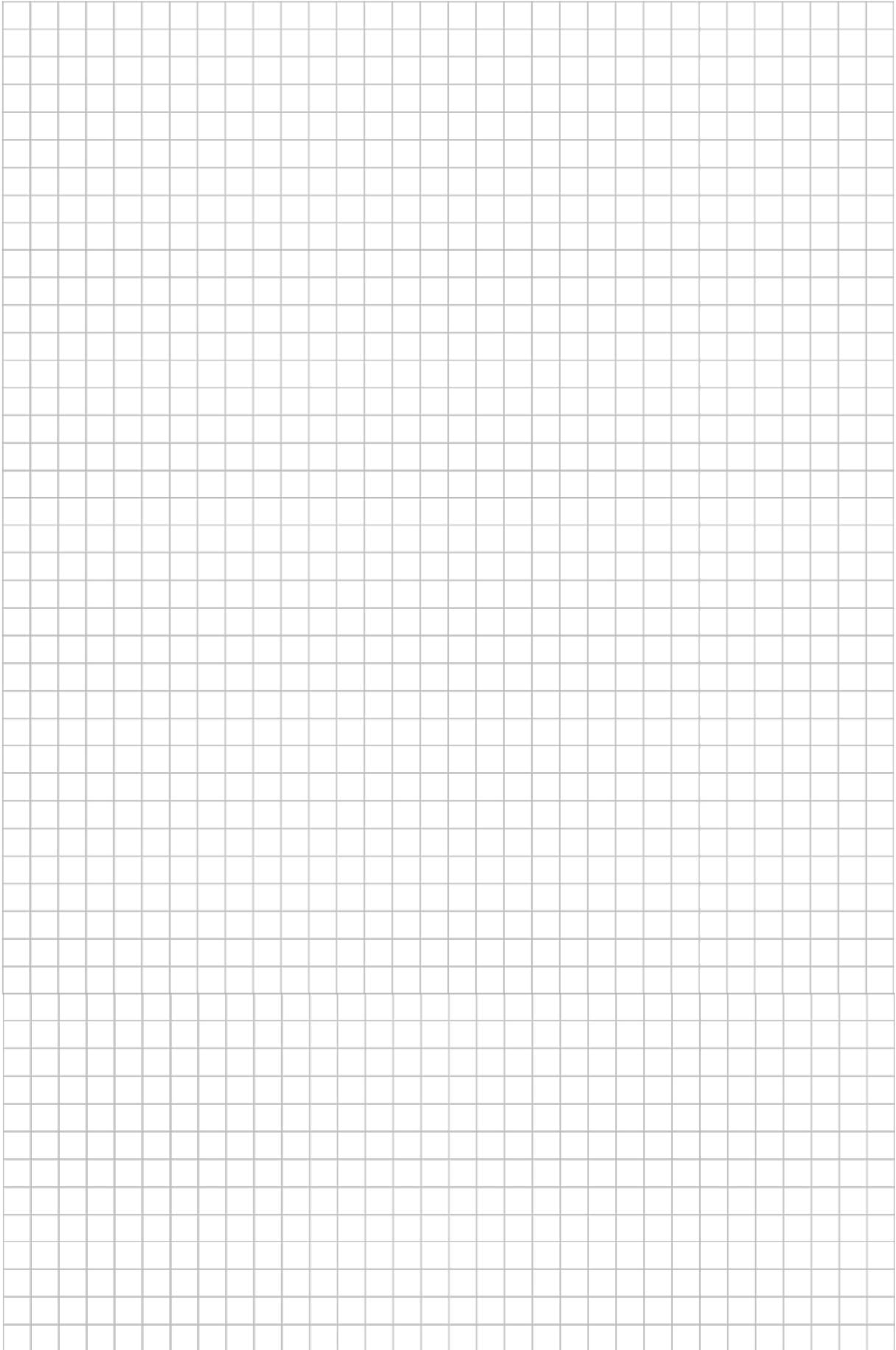
a)	$f_1(x) = \frac{1}{4x} + 1$	b)	$f_2(x) = \frac{3}{x-2} + 2$	c)	$f_3(x) = \frac{4}{x+2,5}$
----	-----------------------------	----	------------------------------	----	----------------------------















## 04 Verschiebung von Hyperbeln im Koordinatensystem: Übungen

**Aufgabe 2:** Entscheide jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Begründe dies mit fachlichen Argumenten.

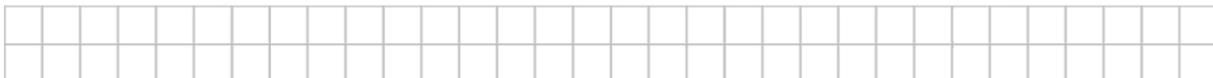
- |  |
|--|
| a) Der Graph der Funktion $g$ mit $g(x) = \frac{3}{x} + 1$ geht aus dem Graphen von $f$ mit $f(x) = \frac{2}{x}$ durch Verschiebung um +1 Längeneinheit (LE) in Richtung der $y$ -Achse hervor.  |
| b) Der Graph der Funktion $g$ mit $g(x) = \frac{3}{x-2} + 1$ geht aus dem Graphen von $f$ mit $f(x) = \frac{3}{x}$ durch Verschiebung um +1LE in Richtung der $y$ -Achse und durch Verschiebung um -2LE in Richtung der $x$ -Achse hervor. |
| c) Der Graph der Funktion $g$ mit $g(x) = \frac{-2}{x}$ geht aus dem Graphen von $f$ mit $f(x) = \frac{2}{x}$ durch Spiegelung an der $y$ -Achse hervor. (Tipp: Zeichne die beiden Graphen.)   |



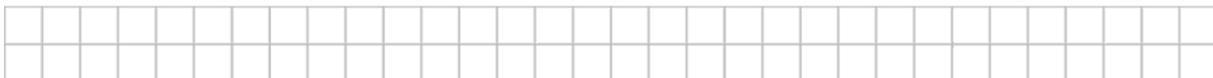
**Aufgabe 3:** Erstelle mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS) die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x-b} + c$ , wobei  $b$  und  $c$  Variablen sind, denen mithilfe eines Schiebereglers Werte zugeordnet werden.

Mit  $f_{00}$  wird die Funktion mit der Funktionsgleichung  $f_{00}(x) = \frac{2}{x}$  bezeichnet.

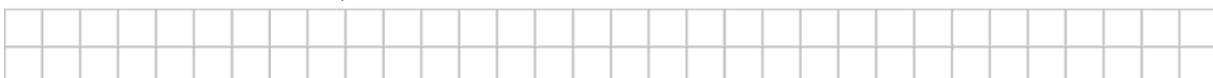
- a) Bestimme die Werte für  $b$  und  $c$  für die der Graph von  $f$  aus dem Graphen von  $f_{00}$  durch Verschiebung um +2LE in  $x$ -Achsenrichtung und -1LE in  $y$ -Achsenrichtung hervorgeht.



- b) Bestimme die Werte für  $b$  und  $c$  für die der Graph von  $f$  aus dem Graphen von  $f_{00}$  durch Verschiebung um -1LE in  $x$ -Achsenrichtung und +3LE in  $y$ -Achsenrichtung hervorgeht.

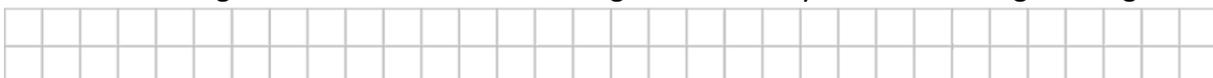


- c) Beschreibe, wie der Graph von  $f$  aus dem Graphen von  $f_{00}$  hervorgeht, wenn man für  $b = -2$  und für  $c = 0,5$  wählt.



Mit  $f_{21}$  wird die Funktion mit der Funktionsgleichung  $f_{21}(x) = \frac{2}{x-2} + 1$  bezeichnet.

- d) Bestimme die Werte für  $b$  und  $c$  für die der Graph von  $f$  aus dem Graphen von  $f_{21}$  durch Verschiebung um +2LE in  $x$ -Achsenrichtung und -1LE in  $y$ -Achsenrichtung hervorgeht.

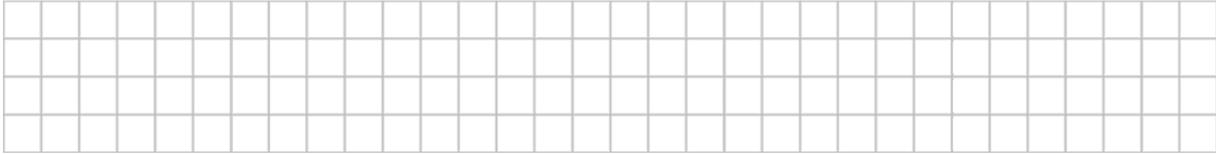






## 04 Verschiebung von Hyperbeln im Koordinatensystem: Übungen

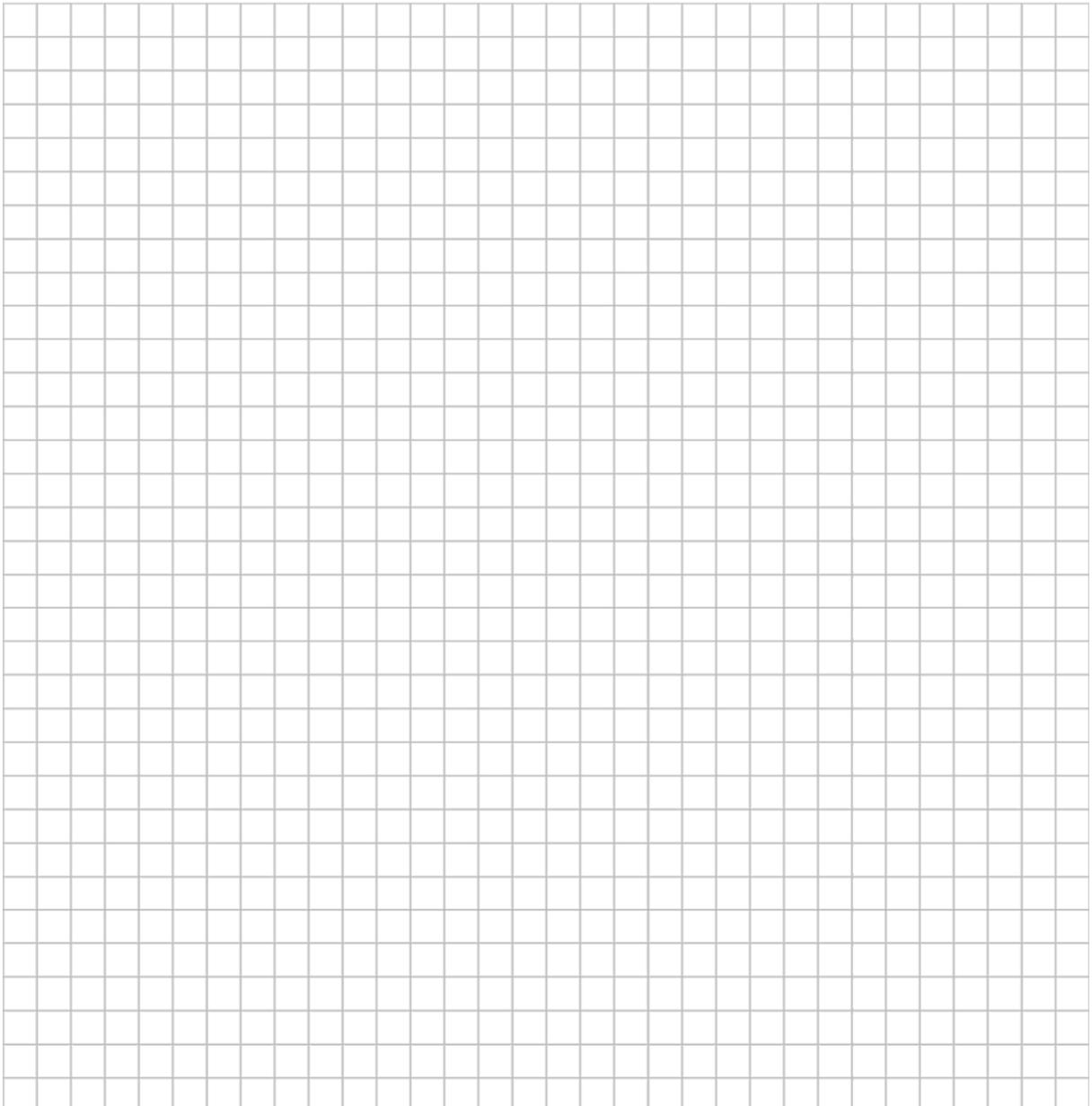
- b) Der Graph  $G_g$  von  $g$  geht durch Verschiebung des Graphen  $G_f$  um  $+0,5LE$  in x-Achsenrichtung und  $+2LE$  in y-Achsenrichtung hervor.  
Zeichne  $G_g$  in das Koordinatensystem und gib die Funktionsgleichung von  $g$  an.



- c) Lese die Koordinaten der Schnittpunkt von  $G_f$  und  $G_g$  mit den Koordinatenachsen möglichst genau ab.



- d) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von  $G_f$  und  $G_g$  durch Rechnung.

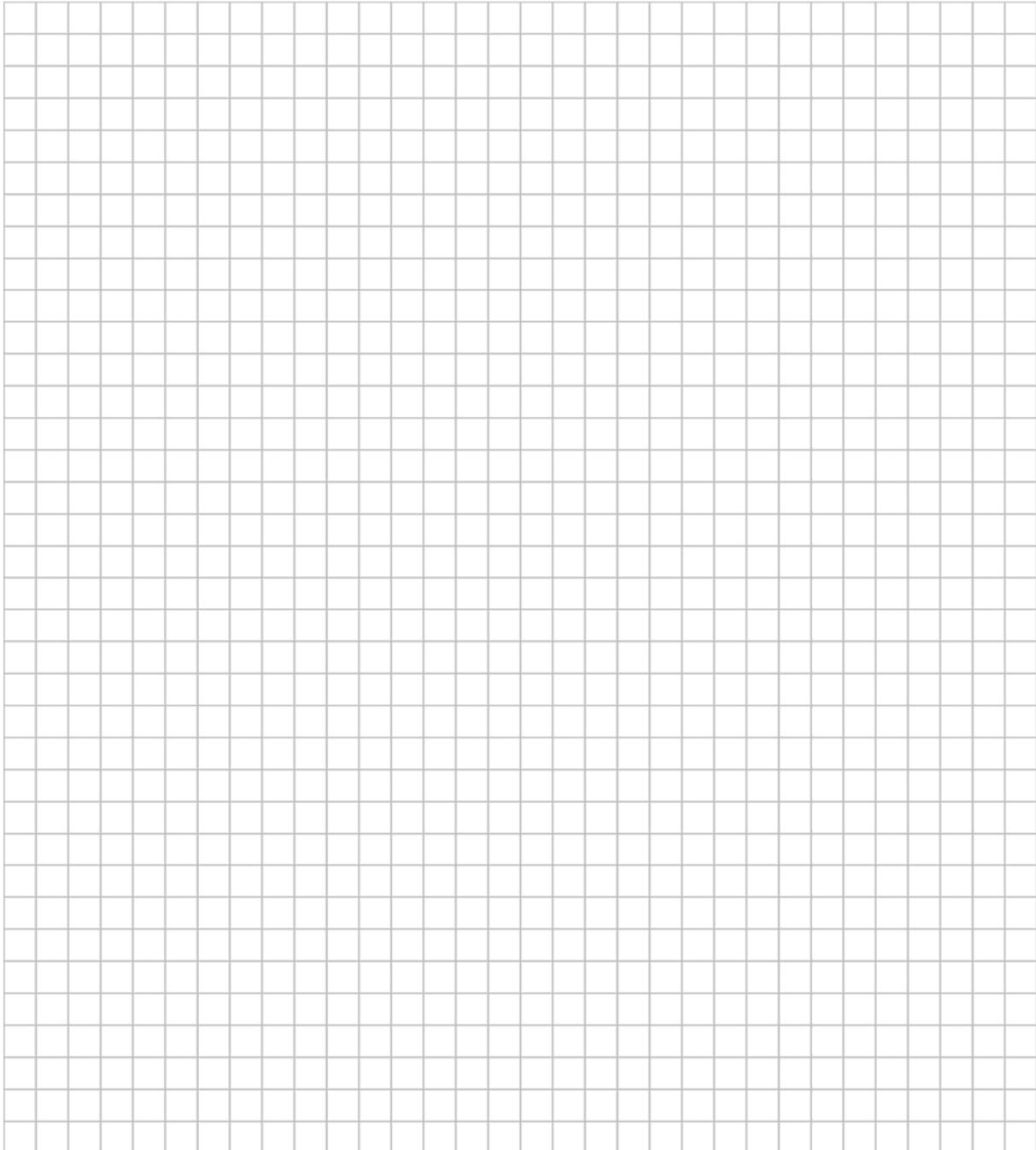




**Aufgabe 7:** Entscheide jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Begründe dies mit fachlichen Argumenten.

a) Der Graph der Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{2}{x-1}$  geht aus dem Graphen von  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x-2}$  durch Verschiebung um +1 Längeneinheiten (LE) in Richtung der  $x$ -Achse hervor.

b) Der Graph der Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$  geht aus dem Graphen von  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x+3} - 1$  durch Verschiebung um +5LE in Richtung der  $x$ -Achse und um Verschiebung um +2LE in Richtung der  $y$ -Achse hervor.







## 05 Indirekt proportionale Größen: Übungen

**Aufgabe 2:** Gegeben ist im Folgenden jeweils eine Wertetabelle. Überprüfe, ob es sich um direkte, indirekte oder keine proportionalen Zuordnungen handelt.

a)

$x$	1	3	5	10
$y$	30	10	6	3

b)

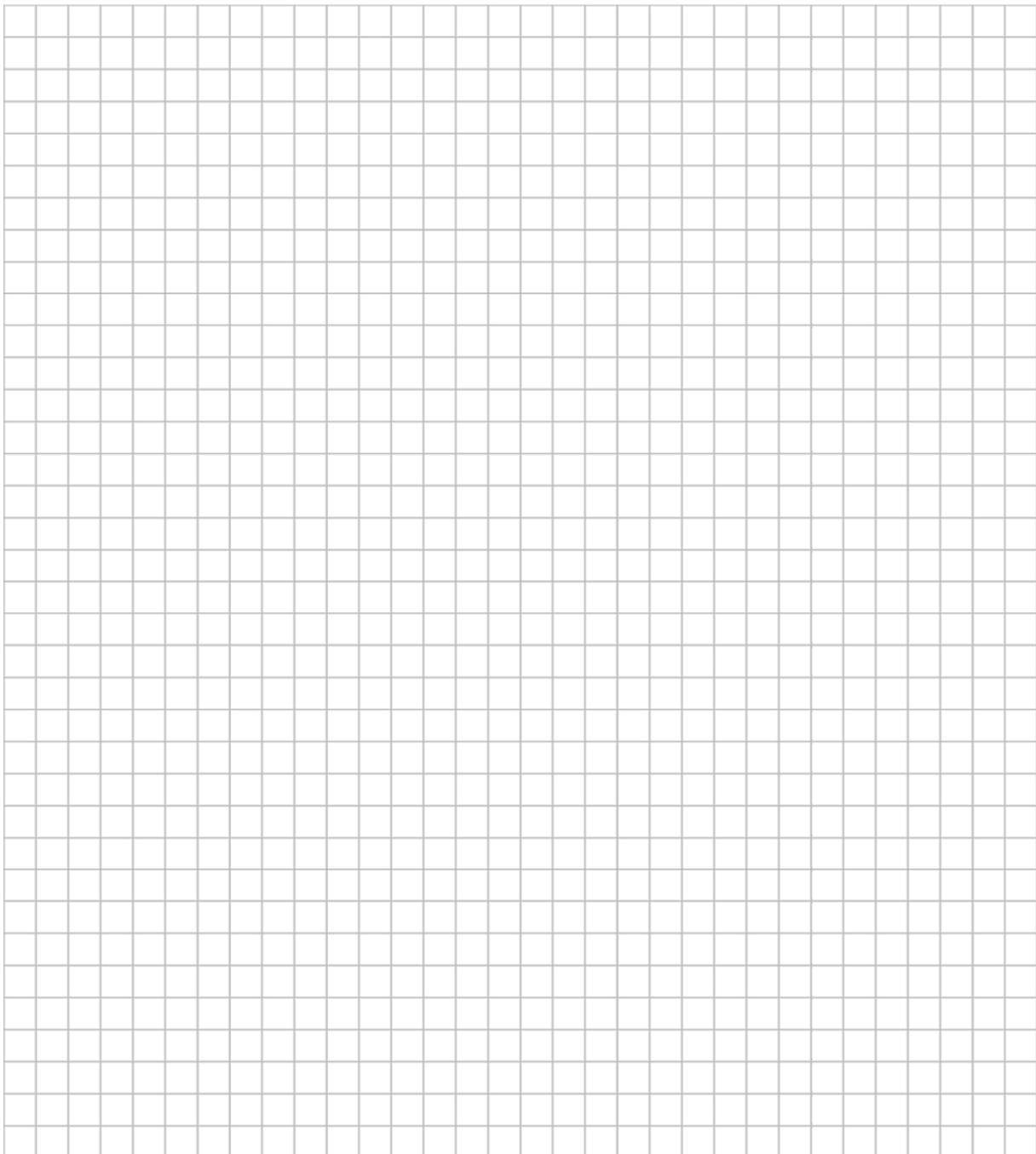
$x$	1,5	3	4,5	10
$y$	10	5	3	1,5

c)

$x$	1	2	3	4
$y$	10	20	30	40

d)

$x$	2	3,5	4	10
$y$	15	$\frac{60}{7}$	7,5	3



## 05 Indirekt proportionale Größen: Übungen

**Aufgabe 3:** Gegeben sind Wertetabellen von indirekt proportionalen Größen. Berechne die fehlenden Werte.

a)

$x$	1	2		
$y$	10		40	60

b)

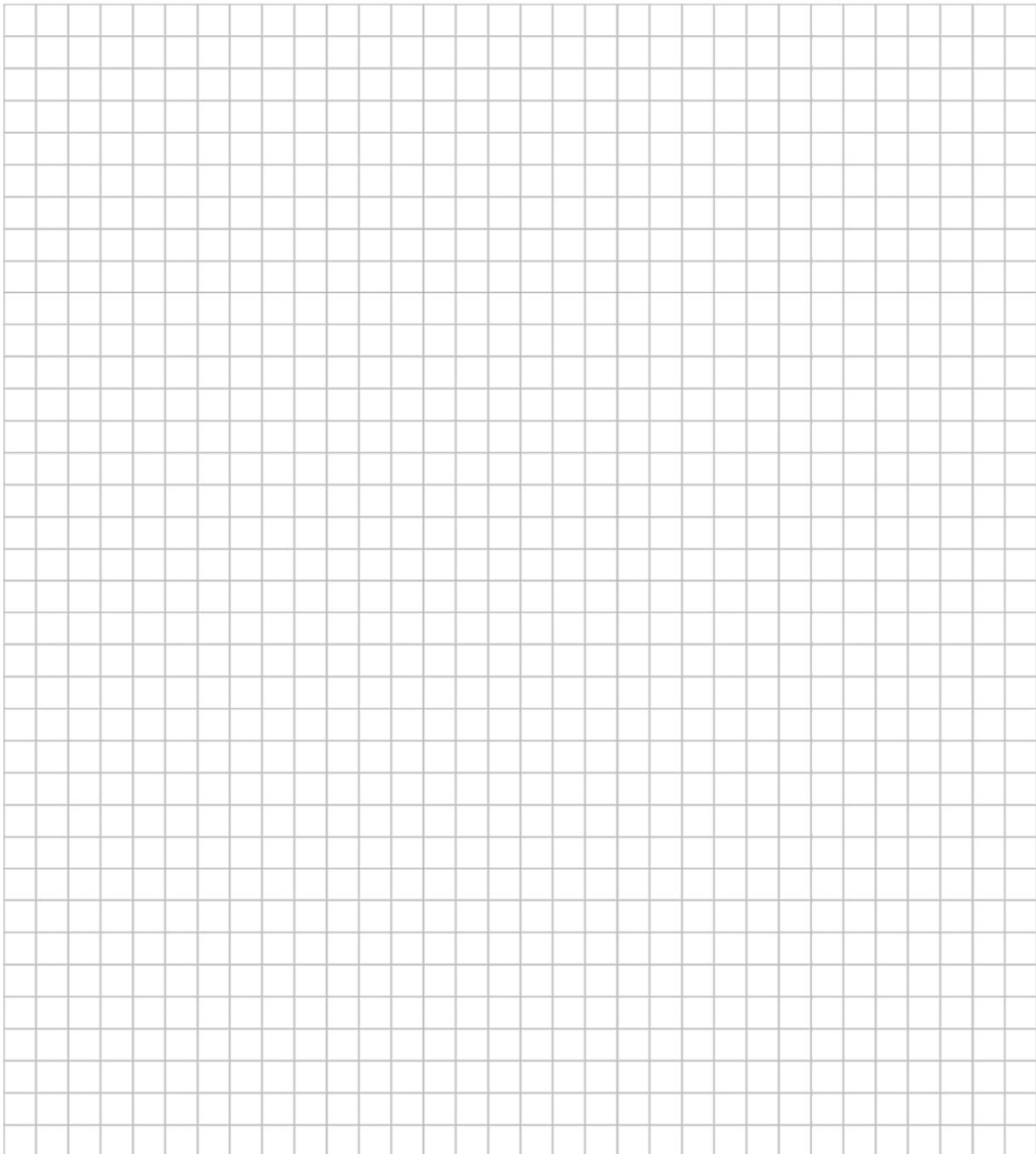
$x$	1,5	3	4,5	
$y$		6		1,5

c)

$x$	1	2	3	4
$y$			2	

d)

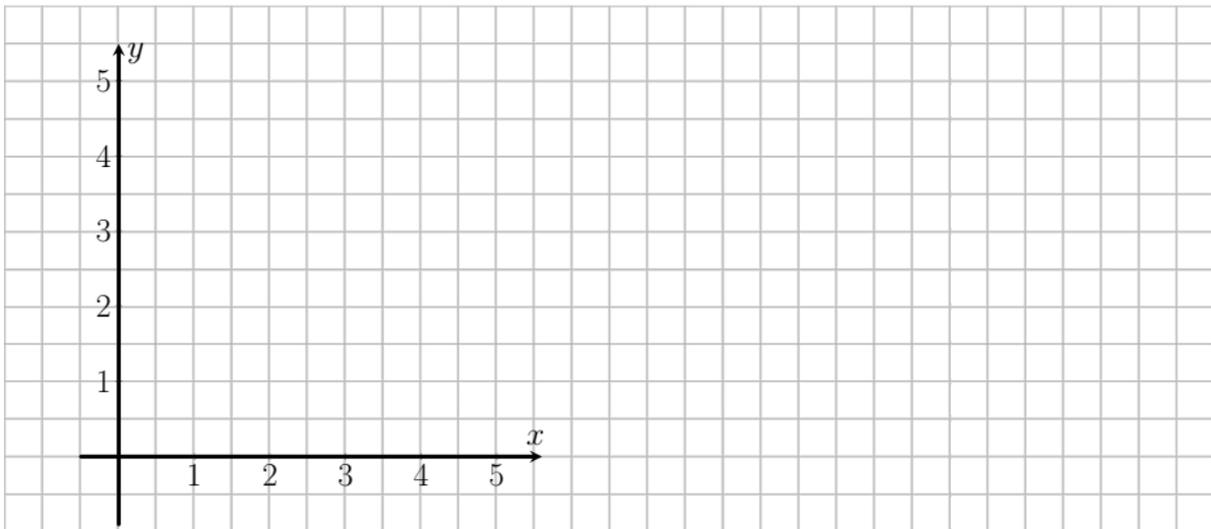
$x$	1	5	10	20
$y$		3		





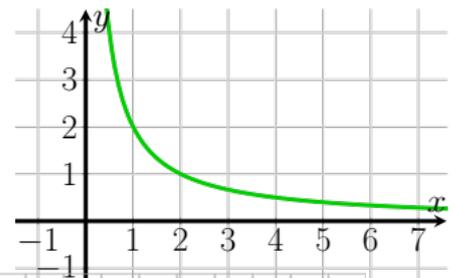
## 05 Indirekt proportionale Größen: Übungen

c) Zeichne den Graphen  $G_f$  von  $f$ .

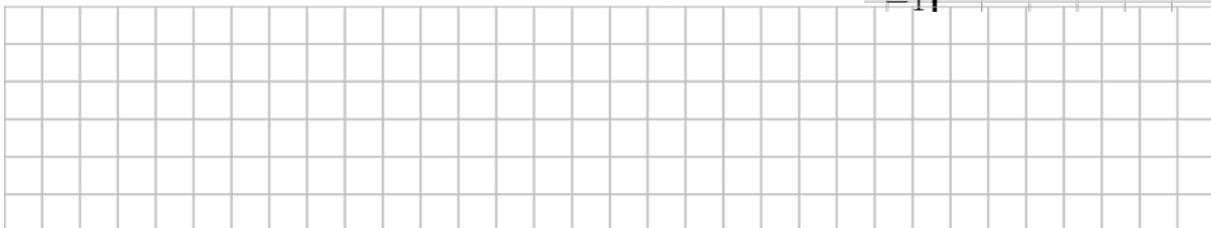


**Aufgabe 6:** Gegeben ist der Graph einer indirekt proportionalen Zuordnung. Die zugehörige Funktion  $f$  hat die Funktionsgleichung  $f(x) = \frac{a}{x}$  mit dem Parameter  $a$ .

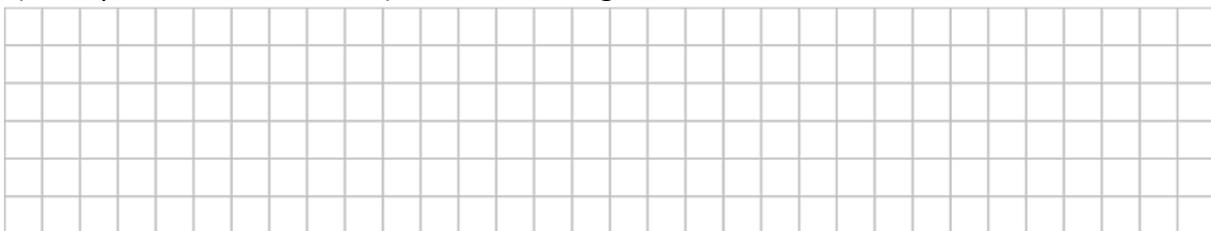
a) Bestimme mit Hilfe des Graphen den Wert des Parameter  $a$ .



b) Lies die Werte für  $f(1)$ ,  $f(3)$  und  $f(5)$  vom Graphen ab.



c) Überprüfe die Werte aus b) durch Rechnung.



d) Weise für die Wertepaare aus c) die Produktgleichheit nach.

