Inhalt

Geometrie Aufgabengruppe 1 2

Pyramide; gleichschenkliges Dreieck; Ebenengleichung; Lage von Ebenen; Kugel; Berührpunkt Ebene-Kugel; Kugelvolumen; 2

Geometrie Aufgabengruppe 2 3

Pyramide; rechtwinkliges Dreieck; Ebenengleichung; Winkel zwischen Ebenen; Innenwinkel im Dreieck; Volumen Pyramide; Kugel;. 3

Geometrie Aufgabengruppe 1 **Lösungen** 4

Pyramide; gleichschenkliges Dreieck; Ebenengleichung; Lage von Ebenen; Kugel; Berührpunkt Ebene-Kugel; Kugelvolumen; 4

Geometrie Aufgabengruppe 2 **Lösungen** 12

Pyramide; rechtwinkliges Dreieck; Ebenengleichung; Winkel zwischen Ebenen; Innenwinkel im Dreieck; Volumen Pyramide; Kugel; 12

Geometrie Aufgabengruppe 1

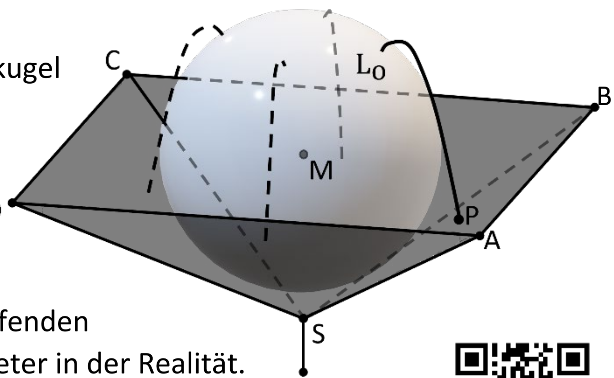
1. Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in einer Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze $S(0|0|1)$. A, B und S liegen in der Ebene F.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem. **(4BE)** Lösung S.6 Lösungsvideo

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform. **(3BE)**
(Zur Kontrolle: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$) Lösung S.7 Lösungsvideo

c) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide $ABCDS$. **(2BE)**
(Zur Kontrolle: $V = 72$) Lösung S.7 Lösungsvideo

Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramiden ABCDS beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r. Die x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.



d) Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau. **(4BE)**
(Zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$) Lösung S.8 Lösungsvideo

e) Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt. **(2BE)** Lösung S.8 Lösungsvideo

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt $L_0(1|1|6)$ beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte $L_t(t+1|t+1|6{,}2 - 5 \cdot (t-0{,}2)^2)$ mit geeigneten Werten $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben.

f) Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks ABS und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale triff (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von P. **(4BE)** Lösung S.9 Lösungsvideo

g) Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens. **(2BE)** Lösung S.10 Lösungsvideo

h) Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzeschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist. **(4BE)** Lösung S.11 Lösungsvideo

Geometrie Aufgabengruppe 2

1. Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche $ABCD$ mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat $EFGH$ mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$. Der Mittelpunkt S des Quadrats $ABCD$ ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3-Ebene als auch bezüglich der x_2x_3-Ebene.

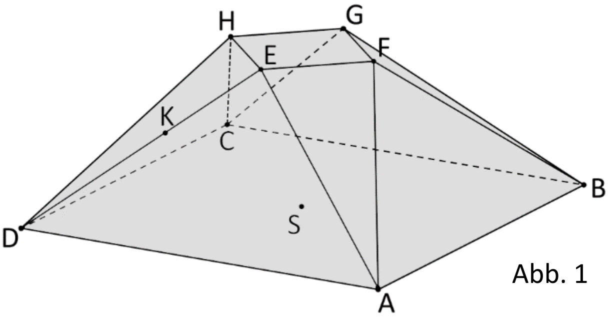


Abb. 1

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist. **(2BE)**

Lösung S.12 | Lösungsvideo

b) Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

Lösung S.13 | Lösungsvideo

c) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche $ABCD$ einschließen. **(3BE)**

Lösung S.14 | Lösungsvideo

Auf der Strecke $[DE]$ gibt es einen Punkt K, für den $\overline{KE} = \overline{EF}$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von K. **(4BE)**

Lösung S.15 | Lösungsvideo

e) $N(1{,}6|0|3{,}2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $[KF]$. Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Geraden EN liegt. **(4BE)**

Lösung S.16 | Lösungsvideo

f) Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden $ABFS$, $HDFS$ bzw. $EFGHS$ ist (vgl. Abbildung 2). Die Pyramide $ABFS$ hat das Volumen $33\frac{1}{3}$ und die Pyramide $HDES$ hat das Volumen $13\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers. **(4BE)**

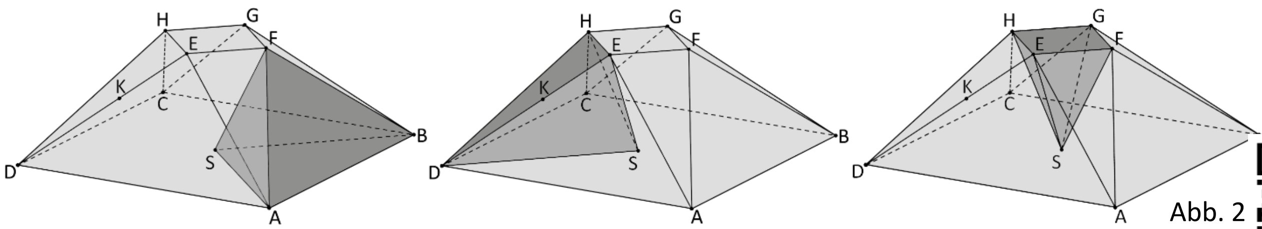


Abb. 2

Lösung S.17 | Lösungsvideo

g) Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel. **(4BE)**

Lösung S.19 | Lösungsvideo

Zurück zum Inhaltverzeichnis

Geometrie Aufgabengruppe 1 **Lösungen**

1. Die Punkte $A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und D liegen in einer Ebene E und bilden die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze $S(0|0|1)$. A, B und S liegen in der Ebene F.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABS gleichschenklig ist. Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem. **(4BE)**

Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklich, wenn zwei Seiten die gleiche Länge besitzen.

$$|\overrightarrow{SA}| = \left|\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+0^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{SB}| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

→ Das Dreieck ABS ist gleichschenklig.

Koordinaten von D:
Da das Rechteck rechtwinklig ist, müssen die zwei gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel sein ($\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{DC}$) und die Vektoren müssen die gleiche Länge besitzen.
→$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\begin{pmatrix}0-6\\6-0\\4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6-d_1\\0-d_2\\4-d_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6-d_1\\-d_2\\4-d_3\end{pmatrix} \qquad \rightarrow d_1 = 0;\ d_2 = -6;\ d_3 = 4;$$

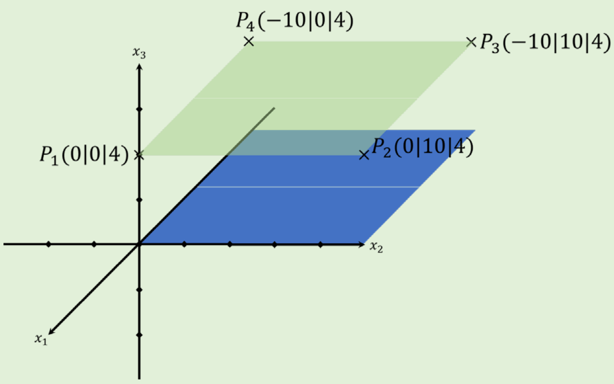
Damit gilt: $D(0|-6|4)$

$A(6|0|4); B(0|6|4); C(-6|0|4); D(0|6|4);$

Da alle Punkte als x_3-Koordinate den Wert $x_3 = 4$ besitzen, liegen sie auf einer Ebene die parallel zur x_1x_2-Ebene im Abstand 4 ist. $E_E: x_3 = 4$

Zurück zur Aufgabe

Beispiel für Punkte, die parallel zur x_1x_2-Ebene liegen:



Zurück zum Inhaltverzeichnis

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform. **(3BE)**
(Zur Kontrolle: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)

$A(6|0|4)$; $B(0|6|4)$; $S(0|0|1)$;

Wir bestimmen einen Normalenvektor zur Ebene F und setzen in die Normalenform ein.

$$\begin{pmatrix}-6\\0\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-6\\0\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}0-6\\0-0\\1-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\-3\end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}0-0\\0-6\\1-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix};$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AS} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix}-6\\0\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot(-3)-(-3)\cdot(-6)\\(-3)\cdot 0-(-3)\cdot(-6)\\(-6)\cdot(-6)-0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\-18\\36\end{pmatrix} = 18\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Normalenform:

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = 0$$

erster Lösungsvorschlag:

Multiplizieren Sie das Skalarprodukt der Normalenform aus.

$$\begin{aligned}(x_1-0)\cdot(-1)+(x_2-0)\cdot(-1)+(x_3-1)\cdot 2 &= 0\\ -x_1-x_2+2(x_3-1) &= 0\\ -x_1-x_2+2x_3-2 &= 0 \qquad |\cdot(-1)\\ x_1+x_2-2x_3+2 &= 0\end{aligned}$$

zweiter Lösungsvorschlag:

In der Koordinatenform sind die Koeffizienten vor den x-Werten gleich den Koordinaten eines Normalenvektors.

→ $F: -x_1 - x_2 + 2x_3 + c = 0$

Um c zu erhalten können einfach die Koordinaten eines Punktes, der auf der Ebene liegt (A, B oder S) eingesetzt werden (hier: $S(0|0|1)$)

→ $-0 - 0 + 2\cdot 1 + c = 0$
$2 + c = 0$
$c = -2$
→ $F: -x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 - 2 = 0$

Zurück zur Aufgabe

c) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide $ABCDS$. **(2BE)**
(Zur Kontrolle: $V = 72$)

$A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$, $D(0|-6|4)$, $S(0|0|1)$

erster Lösungsvorschlag:

Die Grundfläche ist ein Quadrat, also kann man dafür z.B. $\overline{AB}^2$ berechnen.

$$\overline{AB} = \left|\begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-0 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72}$$

$$G = \overline{AB}^2 = 72$$

Für das Volumen gilt: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Der Abstand von S zur Ebene $E_E\colon x_3 = 4$ muss genau 3 sein, da S auf der x_3-Achse an der Stelle $x_3 = 1$ liegt.

$\rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 3 = 72$

zweiter Lösungsvorschlag:

Wir verwenden die Formel für das Volumen einer Pyramide aus der Merkhilfe. Da die Grundfläche quadratisch (rechteckig wäre auch möglich) ist (vgl. Angabe), können wir das Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABCS$ berechnen und dieses verdoppeln.

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$V_{Pyramide} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \circ ((\overrightarrow{AC}) \times (\overrightarrow{AS}))|$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6-6 \\ 0-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 0-0 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};$$

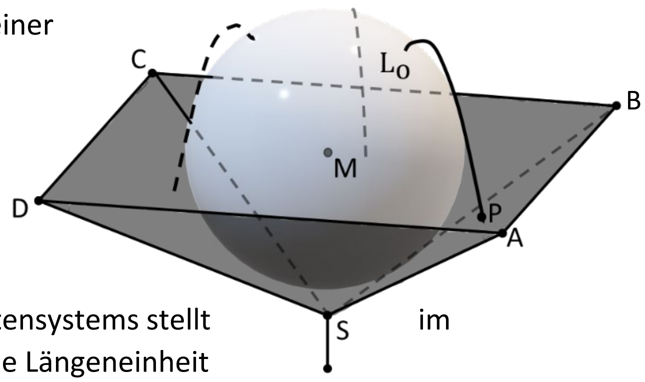
$$(\overrightarrow{AC}) \times (\overrightarrow{AS}) = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-3) - 0 \\ 0 \cdot (-6) - (-12) \cdot (-3) \\ -12 \cdot 0 - 0 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \left((\overrightarrow{AC}) \times (\overrightarrow{AS})\right) = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix} = (-6) \cdot 0 + 6 \cdot (-36) + 0 \cdot 0 = -216$$

$\rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot |-216| = 72$

Zurück zur Aufgabe

Zurück zum Inhaltverzeichnis



Ein auf einer Stange montierter Brunnen besteht aus einer Marmorkugel, die in einer Bronzeschale liegt. Die Marmorkugel berührt die vier Innenwände der Bronzeschale an jeweils genau einer Stelle. Die Bronzeschale wird im Modell durch die Seitenflächen der Pyramiden ABCDS beschrieben, die Marmorkugel durch eine Kugel mit Mittelpunkt $M(0|0|4)$ und Radius r. Die x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems stellt im Modell den horizontal verlaufenden Erdboden dar; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

d) Ermitteln Sie den Durchmesser der Marmorkugel auf Zentimeter genau. **(4BE)**
(Zur Kontrolle: $r = \sqrt{6}$)

erster Lösungsvorschlag:
Die Kugel berührt die Ebene ABS in genau einem Punkt. Das heißt die Ebene ABS liegt wiederum tangential auf dem Kugelrand. Um den Punkt zu erhalten an dem die Berührung stattfindet, kann man eine Gerade durch M aufstellen, die senkrecht auf der Ebene ABS steht.
(Aus Aufgabe b)) $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gerade $G: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wir setzen G in F ein, um den Schnittpunkt zu erhalten.

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda - 2(4 - 2\lambda) + 2 &= 0 \\ 2\lambda - 8 + 4\lambda + 2 &= 0 \\ 6\lambda - 6 &= 0 \qquad |+6 \\ 6\lambda &= 6 \qquad |:6 \\ \lambda &= 1 \end{aligned}$$

→ $\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $S(1|1|2)$;

Der Radius ergibt sich nun aus der Länge der Strecke MS.

$$r = \overline{MS} = \left| \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 2-4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$d = 2 \cdot r = 2\sqrt{6} \triangleq 2\sqrt{6}\, dm \approx 4{,}9\, dm = 49\, cm$$

zweiter Lösungsvorschlag:
Bestimme die Hessesche Normalenform der Ebene F. Diese Form bestimmt man, indem man jeden Wert in der Koordinatenform, durch die Länge des entsprechenden Normalenvektors teilt:
$F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$
$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$HNF: \frac{x_1+x_2-2x_3+2}{\sqrt{6}} = 0$
Setzt man nun die Koordinaten eines Punktes in diese Form ein, dann erhält man betragsmäßig den Abstand des Punktes zur Ebene.
$r = \left|\frac{0+0-2\cdot4+2}{\sqrt{6}}\right| = \left|\frac{-6}{\sqrt{6}}\right| = \sqrt{6}$
$d = 2 \cdot r = 2\sqrt{6} \triangleq 2\sqrt{6}\,dm \approx 4{,}9\,dm = 49\,cm$

Zurück zur Aufgabe

e) Weisen Sie nach, dass der höchste Punkt des Brunnens ca. 64 cm über dem Erdboden liegt. **(2BE)**

Der Mittelpunkt der Kugel liegt 4 dm über der x_1x_2-Ebene. Von diesem aus, muss man genau um die Länge des Radius $r = \sqrt{6}\,dm$ nach oben gehen, um den höchsten Punkt zu erreichen. → $h_{max} = 4\,dm + \sqrt{6}\,dm \approx 6{,}449\,dm \approx 64\,cm$

Zurück zur Aufgabe

Auf der Oberfläche der Marmorkugel treten an vier Stellen Wasserfontänen aus. Eine dieser Austrittsstellen wird im Modell durch den Punkt $L_0(1|1|6)$ beschrieben. Die zugehörige Fontäne wird modellhaft durch Punkte $L_t(t+1|t+1|6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2)$ mit geeigneten Werten $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben.

f) Der Punkt P liegt innerhalb des Dreiecks ABS und beschreibt im Modell die Stelle, an der die Fontäne auf die Bronzeschale triff (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie die Koordinaten von P. **(4BE)**

Das Dreieck ABS liegt in der Ebene F. Es muss also geprüft werden an welchem Punkt die Fontäne auf die Ebene F trifft. Dafür müssen wir L_t in die Ebenengleichung von F einsetzten.
$F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$
L_t in F:

$$\begin{aligned} t+1+t+1-2(6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2)+2 &= 0 \\ 2t+2-2\left(6{,}2-5\cdot(t^2-2\cdot 0{,}2t+0{,}2^2)\right)+2 &= 0 \\ 2t+2-2(6{,}2-5t^2+2t-0{,}2)+2 &= 0 \\ 2t+2-12{,}4+10t^2-4t+0{,}4+2 &= 0 \\ 10t^2-2t-8 &= 0 \end{aligned}$$

$$t_{1,2} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 10\cdot(-8)}}{2\cdot 10} = \frac{2\pm 18}{20}$$

$(t_1 = -\frac{16}{20} = -0{,}8 \notin \mathbb{R}_0^+)$; $t_2 = 1$;

$(L_{t_1}(0{,}2|0{,}2|-2{,}4);)$ $\rightarrow$ $P(2|2|3)$;

Da $S(0|0|1)$ den tiefsten Punkt der Pyramide beschreibt, muss L_{t_2} der korrekte Punkt sein. (Vergleichen Sie dazu die eingefärbten x_3-Koordinaten der Punkte.

Zurück zur Aufgabe

g) Untersuchen Sie, ob der höchste Punkt der Wasserfontäne höher liegt als der höchste Punkt des Brunnens. **(2BE)**

Um den höchsten Punkte der Wasserfontäne zu finden, muss überprüft werden, für welches t die x_3-Koordinate von $L_t(t+1|t+1|6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2)$ am größten ist. Wir betrachten dazu die Funktion f mit $f(t)=6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2$ und suchen ihre Maximalstelle.

erste Möglichkeit:

$f(t)=6{,}2-5\cdot(t-0{,}2)^2$
$f(t)=-5\cdot(t-0{,}2)^2+6{,}2$

$f(t)$ liegt in der Scheitelpunktform vor. Der Graph von f beschreibt also eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt S (hier ein Hochpunkt) bei $S(0{,}2|6{,}2)$
→ Der höchste Punkt der Fontäne liegt bei 62 cm und ist damit niedriger als der höchste Punkt des Brunnens, der bei 64 cm liegt (vgl. e)).

Oder(!):

$$\begin{aligned} f(t) &= 6{,}2-5t^2+2t-0{,}2 && \text{(vgl. Lösung f))}\\ f(t) &= -5t^2+2t+6 \\ f'(t) &= -10t+2 \\ -10t+2 &= 0 && |+10t \\ 2 &= 10t && |:10 \\ t &= \tfrac{1}{5}\,\text{(einfach, VZW)} \end{aligned}$$

zweite Möglichkeit:

Da G_f eine nach unten geöffnete Parabel beschreibt, ist der Scheitelpunkt ein Hochpunkt.

dritte Möglichkeit:

Da $G_{f'}$ eine fallende Gerade beschreibt, wechseln die Werte von f' an der Nullstelle von positiv nach negativ. → G_f hat an dieser Stelle einen Hochpunkt.

vierte Möglichkeit:

$f''(t)=-10$
$f''\left(\frac{1}{5}\right)=-10<0$ → G_f hat einen Hochpunkt an der Stelle $t=\frac{1}{5}$

fünfte Möglichkeit:

Vorzeichentabelle

t	$-\infty<t<\frac{1}{5}$	$t=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}<t<+\infty$
$f'(t)$	$+++$	0	$---$
G_f	↗	HOP	↘

Probewert: $f'(1)=-10\cdot1+2=-8<0$;

$f\left(\frac{1}{5}\right)=-5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+2\cdot\frac{1}{5}+6=6{,}2$

→ Der Höchste Punkt der Fontäne liegt bei 62 dm und ist damit niedriger als der höchste Punkt des Brunnens, der bei 64 dm liegt (vgl. e)).

Zurück zur Aufgabe

h) Aus den vier Austrittsstellen fließen pro Sekunde insgesamt 80 ml Wasser in die Bronzeschale. Bestimmen Sie die Zeit in Sekunden, die vergeht, bis der anfangs leere Brunnen vollständig mit Wasser gefüllt ist. **(4BE)**

Aus Aufgabe c):

Das Volumen der Pyramide beträgt 72 dm^3. Da sich der Mittelpunkt $M(0|0|4)$ der Kugel genau auf der gleichen Höhe befindet, wie der Rand der Pyramide ($A(6|0|4)$, $B(0|6|4)$, $C(-6|0|4)$ und $D(0|-6|4)$) muss das Volumen der Kugel bis zu dieser Höhe abgezogen werden. Damit muss also die Hälfte des Volumens der Marmorkugel abgezogen werden.

$$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6}^3 \cdot \pi$$

$V_{ges} = V_{Pyramide} - V_{Halbkugel} \approx 41{,}21880\ (dm^3)$

Volumen Wasser pro Sekunde: $80\ ml = 0{,}080\ l$

→ $t = \frac{V_{ges}}{0{,}080} s = 515s$

Zurück zur Aufgabe

Geometrie Aufgabengruppe 2 **Lösungen**

1. Der in Abbildung 1 dargestellte Körper wird begrenzt von der quadratischen Grundfläche $ABCD$ mit $A(5|5|0)$, $B(-5|5|0)$, $C(-5|-5|0)$ und $D(5|-5|0)$, acht dreieckigen Seitenflächen und einem weiteren Quadrat $EFGH$ mit $E(2|0|4)$, $F(0|2|4)$, $G(-2|0|4)$ und $H(0|-2|4)$. Der Mittelpunkt S des Quadrats $ABCD$ ist der Ursprung des Koordinatensystems und der gesamte Körper ist symmetrisch sowohl bezüglich der x_1x_3-Ebene als auch bezüglich der x_2x_3-Ebene.

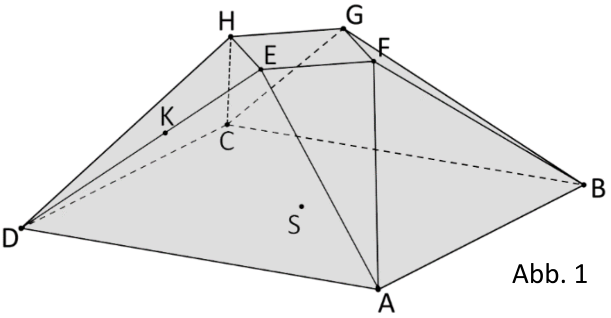


Abb. 1

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABF bei F rechtwinklig ist. **(2BE)**

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 0-(-5) \\ 2-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren null ist.

$\overrightarrow{AF} \circ \overrightarrow{BF} = -5 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = -25 + 9 + 16 = 0$

→ Das Dreieck ABF ist bei F rechtwinklig.

Zurück zur Aufgabe

b) Das Dreieck ABF liegt in der Ebene W. Ermitteln Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von W im Koordinatensystem. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

$A(5|5|0); B(-5|5|0); F(0|2|4);$

$$\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-5\\-3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}$$

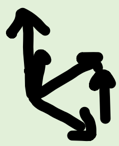
Wir bestimmen einen Normalenvektor zur Ebene W und setzen in die Normalenform ein.

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}; \ \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix};$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\cdot 4 - 4\cdot(-3)\\ 4\cdot 5 - (-5)\cdot 4\\ (-5)\cdot(-3) - (-3)\cdot 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\40\\30\end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$$

Normalenform:

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} = 0$$



erster Lösungsvorschlag:
Multiplizieren Sie das Skalarprodukt der Normalenform aus.

$$\begin{aligned}(x_1 - 0)\cdot 0 + (x_2 - 2)\cdot 4 + (x_3 - 4)\cdot 3 &= 0\\ 4x_2 - 8 + 3x_3 - 12 &= 0\\ 4x_2 + 3x_3 - 20 &= 0\end{aligned}$$

zweiter Lösungsvorschlag:
In der Koordinatenform sind die Koeffizienten vor den x-Werten gleich den Koordinaten eines Normalenvektors.

→ $F: +4x_2 + 3x_3 + c = 0$

Um c zu erhalten können einfach die Koordinaten eines Punktes, der auf der Ebene liegt (A, B oder F) eingesetzt werden (hier: $F(0|2|4)$)

→ $4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + c = 0$

$20 + c = 0$

$c = -20$

→ $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$

Da der Koeffizient vor x_1 gleich 0, ist die Ebene W parallel zur x_1-Achse.

Zurück zur Aufgabe

c) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenfläche ABF und die Grundfläche $ABCD$ einschließen. **(3BE)**

$A(5|5|0)$; $B(-5|5|0)$; $C(-5|-5|0)$; $D(5|-5|0)$;

Um den Winkel zwischen zwei Ebenen zu bestimmen, kann man den Winkel zwischen zwei Normalenvektoren der Ebenen bestimmen.

$\vec{n}_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ wurde bei Aufgabe b) bestimmt.

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erster Lösungsvorschlag:

Da bei A, B, C und D die x_3-Koordinate jeweils 0 ist, liegen die Punkte auf der x_1x_2-Ebene.

Ein Normalenvektor dazu ist der Normalenvektor $\vec{n}_{ABCD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{0^2+0^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53{,}13°$$

zweiter Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen einen Normalenvektor zur Ebene auf der $ABCD$ liegt durch ein Kreuzprodukt aus zwei Vektoren, die in der Ebene liegen.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-10) \\ 0 \cdot (-10) - (-10) \cdot 0 \\ (-10) \cdot (-10) - 0 \cdot (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{n}_{ABCD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{0^2+0^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53{,}13°$$

Zurück zur Aufgabe

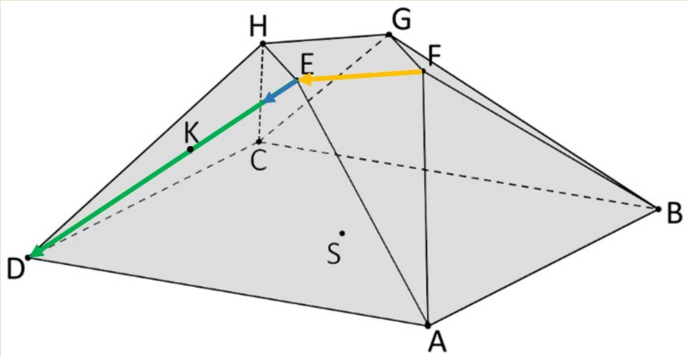
Zurück zum Inhaltverzeichnis

Auf der Strecke $[DE]$ gibt es einen Punkt K, für den $\overline{KE} = \overline{EF}$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten von K. **(4BE)**

$D(5|-5|0)$; $E(2|0|4)$; $F(0|2|4)$;

Wir benötigen zunächst die Streckenlänge $\overline{EF}$.



$$\overline{EF} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2 + (4-4)^2}$$

$$\overline{EF} = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$$

Dann konstruieren wir einen Vektor, der von E nach K zeigt.

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -5-0 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir normieren den Vektor, sodass er die Länge 1LE hat. Dafür teilen wir jeden Eintrag durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{ED}$.

$$\vec{s}_{ED} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{50}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{-5}{\sqrt{50}} \\ \frac{-4}{\sqrt{50}} \end{pmatrix}$$

Nun gehen wir vom Punkt E aus um den Vektor $2\sqrt{2} \cdot \vec{s}_{ED}$ zu Kund erhalten damit die Koordinaten von K.

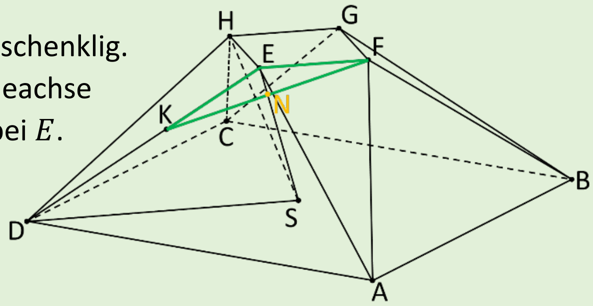
$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2} \cdot \vec{s}_{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{-5}{\sqrt{50}} \\ \frac{-4}{\sqrt{50}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{25}} \\ \frac{-10}{\sqrt{25}} \\ \frac{-8}{\sqrt{25}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -2 \\ \frac{-8}{5} \end{pmatrix}$$

→ $K(3{,}2|-2|2{,}4)$

Zurück zur Aufgabe

e) $N(1{,}6|0|3{,}2)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $[KF]$. Begründen Sie, dass die Gerade EN den Innenwinkel des Dreiecks DFE bei E halbiert, und weisen Sie rechnerisch nach, dass S auf der Geraden EN liegt. **(4BE)**

$E(2|0|4)$;
Da $\overline{EF}$ und $\overline{EK}$ gleich groß sind, ist das Dreieck KFE gleichschenklig. Damit ist das Dreieck symmetrisch bezüglich der Symmetrieachse EN. Also halbiert EN den Innenwinkel des Dreiecks KFE bei E. Das ist derselbe Winkel, wie der des Dreiecks DFE bei E.



erster Lösungsvorschlag:

Wir bilden die Vektoren $\overrightarrow{EN}$ und $\overrightarrow{SN}$ und überprüfen, ob sich diese als Vielfache voneinander darstellen lassen bzw. ob sie linear unabhängig sind.

$$\overrightarrow{EN} = \begin{pmatrix} 1{,}6-2 \\ 0-0 \\ 3{,}2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SN} = \begin{pmatrix} 1{,}6-0 \\ 0-0 \\ 3{,}2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 0 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 0 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \mu = -4 \\ 0 = 0 \\ \mu = -4 \end{matrix} \qquad \rightarrow S \text{ liegt auf der Geraden } EN.$$

zweiter Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen die Geradengleichung von EN:

$$EN: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1{,}6-2 \\ 0-0 \\ 3{,}2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen, ob $S(0|0|0)$ auf EN liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{matrix} \lambda = -5 \\ 0 = 0 \\ \lambda = -5 \end{matrix} \qquad \rightarrow S \text{ liegt auf der Geraden } EN.$$

Zurück zur Aufgabe

Zurück zum Inhaltverzeichnis

f) Der Körper kann in neun Pyramiden zerlegt werden, von denen jede kongruent zu genau einer der drei Pyramiden $ABFS$, $HDFS$ bzw. $EFGHS$ ist (vgl. Abbildung 2). Die Pyramide $ABFS$ hat das Volumen $33\frac{1}{3}$ und die Pyramide $HDES$ hat das Volumen $13\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie das Volumen des gesamten Körpers. **(4BE)**

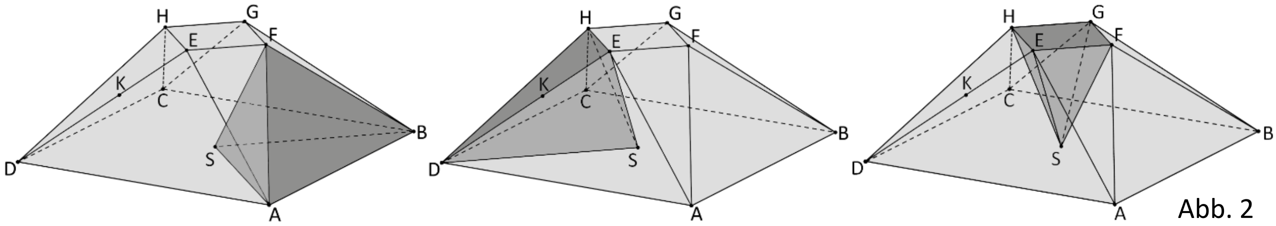


Abb. 2

$E(2|0|4)$; $F(0|2|4)$; $G(-2|0|4)$; $H(0|-2|4)$;

Die Grundfläche $EFGH$ der Pyramide ist ein Quadrat. Wir weisen zumindest nach, dass es sich um ein Rechteck handelt.

$$\overrightarrow{HE} \circ \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,;\ \overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0;\ \overrightarrow{FG} \circ \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

→ $EFGH$ ist ein Rechteck.

An den Einträgen der Vektoren erkennt man, dass diese alle die gleiche Länge haben.

→ $EFGH$ ist ein Quadrat.

erster Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen die Grundfläche der Pyramide.

$\overline{EF} = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$

Für das Volumen gilt: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

(das doppelte Volumen einer entsprechenden dreiseitigen Pyramide)

$EFGH$ liegt parallel zur x_1x_2-Ebene im Abstand 4 LE. Damit ist die Höhe auch gleich 4 LE.

→ $V_{EFGHS} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 4 = \frac{32}{3}$

Um das Gesamtvolumen zu erhalten das Volumen der Pyramiden $ABFS$ und $HDES$ jeweils vier Mal benötigt.

$V_{gesamt} = 4 \cdot V_{ABFS} + 4 \cdot V_{HDES} + V_{EFGHS} = 4 \cdot 33\frac{1}{3} + 4 \cdot 13\frac{1}{3} + \frac{32}{3} = 197\frac{1}{3} = \frac{592}{3}$

zweiter Lösungsvorschlag:

$$\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

Wir verwenden die Formel für das Volumen einer Pyramide aus der Merkhilfe. Da die Grundfläche quadratisch (rechteckig wäre auch möglich) ist, können wir das Volumen der dreiseitigen Pyramide $EFGS$ berechnen und dieses verdoppeln.

$E(2|0|4)$; $F(0|2|4)$; $G(-2|0|4)$; $H(0|-2|4)$;

$$V_{Pyramide} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{FE} \circ \left(\left(\overrightarrow{FG}\right) \times \left(\overrightarrow{FS}\right)\right)\right|$$

$$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix}0-2\\2-0\\4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}-2-0\\0-2\\4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix}0-0\\0-2\\0-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix};$$

$$\left(\overrightarrow{FG}\right) \times \left(\overrightarrow{FS}\right) = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot(-4) - 0\cdot(-2)\\0\cdot 0 - (-2)\cdot(-4)\\-2\cdot(-2) - (-2)\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-8\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FE} \circ \left(\left(\overrightarrow{FG}\right) \times \left(\overrightarrow{FS}\right)\right) = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}8\\-8\\4\end{pmatrix} = 2\cdot 8 - 2\cdot(-8) + 0\cdot 4 = 32$$

$\rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot |32| = \frac{32}{3}$

Um das Gesamtvolumen zu erhalten das Volumen der Pyramiden $ABFS$ und $HDES$ jeweils vier Mal benötigt.

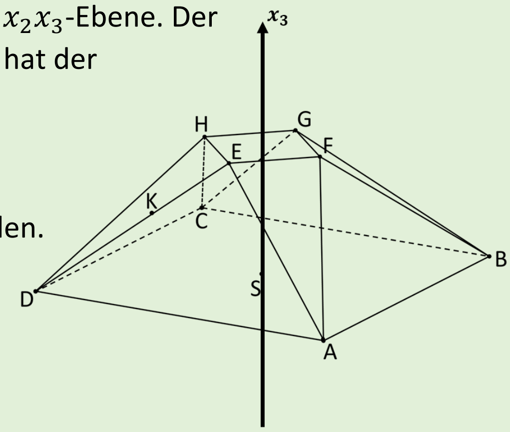
$$V_{gesamt} = 4 \cdot V_{ABFS} + 4 \cdot V_{HDES} + V_{EFGHS} = 4 \cdot 33\frac{1}{3} + 4 \cdot 13\frac{1}{3} + \frac{32}{3} = 197\frac{1}{3} = \frac{592}{3}$$

Zurück zur Aufgabe

g) Es gibt genau eine Kugel, auf der alle acht Eckpunkte des Körpers liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieser Kugel. **(4BE)**

$A(5|5|0); B(-5|5|0); C(-5|-5|0); D(5|-5|0);$
$E(2|0|4); F(0|2|4); G(-2|0|4); H(0|-2|4);$

Der betrachtete Körper ist symmetrisch zur x_1x_3-Ebene und zur x_2x_3-Ebene. Der Mittelpunkt der Kugel muss also auf der x_3-Ebene liegen. Damit hat der Mittelpunkt die Koordinaten $M(0|0|m)$.



Der Abstand zu jedem Punkt muss gleich groß sein. Wir wählen zwei Punkte passende Punkte aus, um eine Bedingung aufzustellen.

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{MA}\right| &= \left|\overrightarrow{ME}\right| \\
\left|\begin{pmatrix} 5-0 \\ 5-0 \\ 0-m \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-0 \\ 4-m \end{pmatrix}\right| \\
\sqrt{5^2+5^2+(-m)^2} &= \sqrt{2^2+0^2+(4-m)^2} \\
\sqrt{50+m^2} &= \sqrt{4+16-8m+m^2} \\
50+m^2 &= 20-8m+m^2 && |-m^2 \\
50 &= 20-8m && |-20 \\
30 &= -8m && |:(-8) \\
m &= -3{,}75
\end{aligned}$$

→ $M(0|0|-3{,}74)$

Zurück zur Aufgabe