Inhalt

Stochastik Aufgabengruppe 1

1. An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen: **(3BE)**

$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}$; $P(B) = \frac{6}{6^4}$;

Lösung S.6 Lösungsvideo

2. Im Eingangsbereich des Freizeitparks können Bollerwagen ausgeliehen werden. Erfahrungsgemäß nutzen 15% der Familien dieses Angebot. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Bollerwagen, die von den ersten 200 Familien, die an einem Tag den Freizeitpark betreten, entliehen werden. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass eine Familien höchstens einen Bollerwagen ausleiht und dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden. **(2BE)**

Lösung S.7 Lösungsvideo

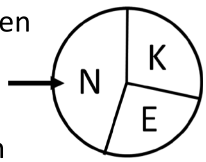
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht. **(2BE)**

Lösung S.7 Lösungsvideo

c) Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks den kleinsten symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% liegen. **(5BE)**

Lösung S.7 Lösungsvideo

3. Der Freizeitpark veranstaltet ein Glücksspiel, bei dem Eintrittskarten für den Freizeitpark gewonnen werden können. Zu Beginn des Spiels wirft man einen Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Erzielt man dabei die Zahl 6, darf man anschließend einmal an einem Glücksrad mit drei Sektoren drehen (vgl. schematische Abbildung). Wird Sektor K erziel, gewinnt man eine Kinderkarte im Wert von 28 Euro, bei Sektor E eine Erwachsenenkarte im Wert von 36 Euro. Bei Sektor N geht man leer aus. Der Mittelpunktswinkel des Sektors N beträgt 160°. Die Größen der Sektoren K und E sind so gewählt, dass pro Spiel der Gewinn im Mittel drei Euro beträgt. Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E. **(6BE)**



Lösung S.8 Lösungsvideo

4. Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

a) Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben. **(2BE)**

Lösung S.9 Lösungsvideo

b) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$ hat. **(2BE)**

Lösung S.10 Lösungsvideo

c) Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90% ist. **(3BE)**

Lösung S.10 Lösungsvideo

Zurück zum Inhaltverzeichnis

Stochastik Aufgabengruppe 2

Ein Süßwarenunternehmen stell verschiedene Sorten Fruchtgummis her.

1. Luisa nimmt an einer Betriebsbesichtigung des Unternehmens teil. Zu Beginn der Führung bekommt sie ein Tütchen mit zehn Gummibärchen, von denen fünf weiß, zwei rot und drei grün sind. Luisa öffnet das Tütchen und nimmt, ohne hinzusehen, drei Gummibärchen heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben. **(3BE)**

Lösung S.11 Lösungsvideo

2. Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25% beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist. **(3BE)**

Lösung S.11 Lösungsvideo

b) Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann: **(2BE)**

$$\sum_{k=0}^{3}(0{,}75^k \cdot 0{,}25)$$

Lösung S.12 Lösungsvideo

c) Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist. **(4BE)**

Lösung S.12 Lösungsvideo

Zurück zum Inhaltverzeichnis

3. Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduzierte und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42% der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63% der Tüten werden weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig gewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet."
R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet."

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{R}$. **(3BE)**

Lösung S.13 Lösungsvideo

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{V}}(R)$. **(3BE)**

Lösung S.13 Lösungsvideo

c) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P_{\overline{V}}(R)$ im Sachzusammenhang. **(2BE)**

Lösung S.13 Lösungsvideo

4. Bei einer Werbeaktion werden den Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf jedem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl an Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

a) Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X. **(3BE)**

Lösung S.14 Lösungsvideo

b) Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.
Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E(Y_n) = n$ und $Var(Y_n) = n$. Bestimmen Sie den Wert von n, für den die relative Standardabweichung 5% beträgt. **(2BE)**

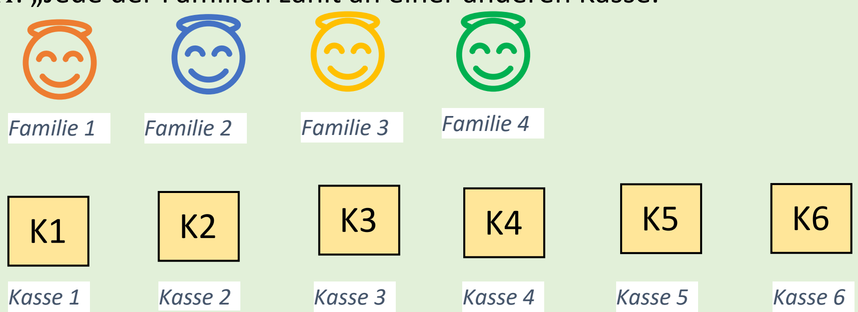
Lösung S.14 Lösungsvideo

Stochastik Aufgabengruppe 1 **Lösungen**

1. An einem Samstagvormittag kommen nacheinander vier Familien zum Eingangsbereich eines Freizeitparks. Jede der vier Familien bezahlt an einer der sechs Kassen, wobei davon ausgegangen werden soll, dass jede Kasse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang zwei Ereignisse A und B, deren Wahrscheinlichkeiten sich mit den folgenden Termen berechnen lassen: **(3BE)**

$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}$; $P(B) = \frac{6}{6^4}$;

A: „Jede der Familien zahlt an einer anderen Kasse."



Erklärung: Familie 1 hat 6 Möglichkeiten, um an einer beliebigen Kasse zu zahlen. Wenn Familie 2 nicht an der gleichen Kasse zahlen soll, dann hat Familie 2 für jede der möglichen Wahlen von Familie 1 noch 5 Möglichkeiten, um zu zahlen übrig. Familie 3 hat dann für jede dieser Möglichkeiten noch 4 Möglichkeiten, während Familie 4 dann noch jeweils 3 Möglichkeiten bleiben. Damit ergeben sich $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten.
Insgesamt hat jede Familie 6 Möglichkeiten (Kasse 1 bis 6) zum Zahlen. Es gibt damit $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ mögliche Kombinationen. Die Wahrscheinlichkeit ist dann die Anzahl der erwünschten Möglichkeiten durch die Anzahl der möglichen Kombinationen, also $P(A)$.

B: „Alle Familien zahlen an der gleichen Kasse."
Es können alle an Kasse 1, Kasse 2, Kasse 3, Kasse 4, Kasse 5 oder Kasse 6 zahlen, was 6 Möglichkeiten ergibt. Für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens gilt dann $P(B)$.

Zurück zur Aufgabe

2. Im Eingangsbereich des Freizeitparks können Bollerwagen ausgeliehen werden. Erfahrungsgemäß nutzen 15% der Familien dieses Angebot. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Bollerwagen, die von den ersten 200 Familien, die an einem Tag den Freizeitpark betreten, entliehen werden. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass eine Familien höchstens einen Bollerwagen ausleiht und dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 25 Bollerwagen ausgeliehen werden. **(2BE)**

k	p
…	
23	0,09592
24	0,13682
25	0,18762

$p = 0{,}15$
X: „Anzahl der entliehenen Bollerwagen unter den ersten 200 Familien“
$n = 200$
$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - F_{0,15}^{200}(24) = 1 - \sum_{i=0}^{24} B(200; 0{,}15; 24) = 1 - 0{,}13682$
$P(X \geq 25) = 0{,}86318$

Zurück zur Aufgabe

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die fünfte Familie die erste ist, die einen Bollerwagen ausleiht. **(2BE)**

$P(A) = 0{,}85^4 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}07830$
Erklärung: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Familie keinen Böllerwagen nimmt beträgt 0,85. Damit ergibt sich für die ersten vier Familien eine Wahrscheinlichkeit von $0{,}85^4$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die fünfte Familie einen Böllerwagen nimmt, beträgt 0,15, womit der oben dargestellte Ansatz entsteht.

Zurück zur Aufgabe

c) Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des Tafelwerks den kleinsten symmetrisch um den Erwartungswert liegenden Bereich, in dem die Werte der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% liegen. **(5BE)**

$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}15 = 30$
Wir suchen also ein Intervall um den Wert von 30, dass mindesten 75% der Fälle enthält.
Mathematisch hingeschrieben:
$P(E(X) - c \leq X \leq E(X) + c) \geq 0{,}75$

$P(30 - c \leq X \leq 30 + c) \geq 0{,}75$
$P(X \leq 30 + c) - P(X \leq 30 - c - 1) \geq 0{,}75$

k	$P(X \leq k)$	k	
…	…	…	…
22	0,06450	30	0,54851
23	0,09592	31	0,62475
24	0,13682	32	0,69580
25	0,18762	33	0,75963
26	0,24797	34	0,81496
27	0,31659	35	0,86127
28	0,39142	36	0,89872
29	0,46973	37	0,92802

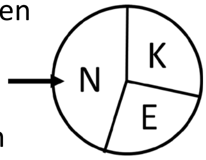
Tafelwerk: Wir betrachten die kumulierte Verteilung:
Für $c = 4$ gilt: $0{,}81496 - 0{,}18762 = 0{,}62734$
Für $c = 5$ gilt: $0{,}86127 - 0{,}13862 = 0{,}72265$
Für $c = 6$ gilt: $0{,}89872 - 0{,}09592 = 0{,}80280 > 0{,}75$
→Der kleinste um den Erwartungswert liegende Bereich ist: $24 \leq X \leq 36$

$P(X = 29) = 0{,}07832$
$P(X = 30) = 0{,}07878$
$P(X = 31) = 0{,}07624$

Zurück zur Aufgabe

Zurück zum Inhaltverzeichnis

3. Der Freizeitpark veranstaltet ein Glücksspiel, bei dem Eintrittskarten für den Freizeitpark gewonnen werden können. Zu Beginn des Spiels wirft man einen Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind. Erzielt man dabei die Zahl 6, darf man anschließend einmal an einem Glücksrad mit drei Sektoren drehen (vgl. schematische Abbildung). Wird Sektor K erziel, gewinnt man eine Kinderkarte im Wert von 28 Euro, bei Sektor E eine Erwachsenenkarte im Wert von 36 Euro. Bei Sektor N geht man leer aus. Der Mittelpunktswinkel des Sektors N beträgt 160°. Die Größen der Sektoren K und E sind so gewählt, dass pro Spiel der Gewinn im Mittel drei Euro beträgt. Bestimmen Sie die Größe der Mittelpunktswinkel der Sektoren K und E. **(6BE)**



Gewinn G	0	28	36
$P(G)$	$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{160°}{360°}=\frac{49}{54}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{360°}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{b}{360°}=\frac{1}{6}\cdot\frac{360°-160°-a}{360°}=\frac{1}{6}\cdot\frac{200°-a}{360°}$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{49}{54}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{360°}\cdot 28+\frac{1}{6}\cdot\frac{200°-a}{360°}\cdot 36 \\
\frac{49}{54}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{360°}\cdot 28+\frac{1}{6}\cdot\frac{200°-a}{360°}\cdot 36 &= 3 \\
\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{360°}\cdot 28+\frac{1}{6}\cdot\frac{200°-a}{360°}\cdot 36 &= 3 && |\cdot 6\cdot 360° \\
a\cdot 28+(200°-a)\cdot 36 &= 6480° \\
28a+7200°-36a &= 6480° && |-7200° \\
-8a &= -720° && |:(-8) \\
a &= 90° \\
\rightarrow b &= 200°-90°=110°
\end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{49}{54}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{360°}\cdot 28+\frac{1}{6}\cdot\frac{200°-a}{360°}\cdot 36 \\
\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{360°}\cdot 28+\frac{1}{6}\cdot\frac{200°-a}{360°}\cdot 36 &= 3 \\
\frac{7}{540°}a+\frac{200°-a}{60°} &= 3 \\
\frac{7}{540°}a+\frac{10}{3}-\frac{1}{60°}a &= 3 && |-\frac{10}{3} \\
-\frac{1}{270°}a &= -\frac{1}{3} && |\cdot(-270°) \\
a &= 90° && |:(-8) \\
\rightarrow b &= 200°-90°=110°
\end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe

4. Am Ausgang des Freizeitparks gibt es einen Automaten, der auf Knopfdruck einen Anstecker mit einem lustigen Motiv bedruckt und anschließend ausgibt. Für den Druck wird aus n verschiedenen Motiven eines zufällig ausgewählt, wobei jedes Motiv die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Ein Kind holt sich drei Anstecker aus dem Automaten.

a) Bestimmen Sie für den Fall $n = 5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle drei Anstecker dasselbe Motiv haben. **(2BE)**

Anzahl der Möglichkeiten insgesamt: $|\Omega| = 5^3 = 125$
A: „Nicht alle Anstecker haben dasselbe Motiv.“
(Hinweis: Das gilt auch, wenn nur zwei Anstecker dasselbe Motiv haben.)

Erster Lösungsvorschlag:

Wir betrachten das Gegenereignis.
$\bar{A}$: „Alle Anstecker haben dasselbe Motiv.“
Anzahl der möglichen Kombinationen für drei gleiche Motive:

$$|\bar{A}| = \overbrace{5}^{1.Motiv} \cdot \overbrace{1}^{2.Motiv\ gleich} \cdot \overbrace{1}^{3.Motiv\ gleich}$$

Wir bestimmen die Lösung anhand der Gegenwahrscheinlichkeit:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5 \cdot 1 \cdot 1}{5^3} = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

Zweiter Lösungsvorschlag:

Anzahl der möglichen Kombinationen für 3 verschiedene Motive:

$$\overbrace{5}^{1.Motiv} \cdot \overbrace{4}^{2.Motiv\ ungleich} \cdot \overbrace{3}^{3.Motiv\ ungleich}$$

Anzahl der möglichen Kombinationen für 2 verschiedene Motive:

$$\overbrace{5}^{1.Motiv} \cdot \overbrace{1}^{\substack{2.Motiv\ muss \\ gleich\ sein}} \cdot \overbrace{4}^{\substack{3.Motiv \\ ist\ ungleich}} \cdot \overbrace{\frac{3!}{2! \cdot 1!}}^{\substack{versch.\ Kombinationen \\ der\ Lösungen}}$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} + \frac{5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} = \frac{24}{25}$$

Zurück zur Aufgabe

b) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, den Wert $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}$ hat. **(2BE)**

Analoger Ansatz zur Aufgabe 4a) zweiter Lösungsvorschlag:

Anzahl der Möglichkeiten insgesamt: $|\Omega| = n^3$

Anzahl der möglichen Kombinationen für 3 verschiedene Motive:

$$|A| = \overbrace{n}^{1.Motiv} \cdot \overbrace{(n-1)}^{2.Motiv\ ungleich} \cdot \overbrace{(n-2)}^{3.Motiv\ ungleich}$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

Zurück zur Aufgabe

c) Bestimmen Sie, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich drei verschiedene Motive auf den Ansteckern befinden, größer als 90% ist. **(3BE)**

Aus Aufgabe b):

$$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
P(A) &> 90\% \\
\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} &> 90\% \\
\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} &> 0{,}90 \qquad |\cdot n^2 \\
(n-1)(n-2) &> 0{,}90n^2 \\
n^2 - 2n - n + 2 &> 0{,}90n^2 \qquad |-0{,}90n^2 \\
0{,}1n^2 - 3n + 2 &> 0 \\
n_{1,2} &= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 0{,}1\cdot 2}}{2\cdot 0{,}1} \\
(n_1 \approx 0{,}68) & \quad n_2 \approx 29{,}32
\end{aligned}$$

→ Da der Graph von $f(x) = 0{,}1x^2 - 3x + 2$ eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, folgt, dass $0{,}1n^2 - 3n + 2 > 0$ ab $n = 30$ gilt.

Zurück zur Aufgabe

Stochastik Aufgabengruppe 2 **Lösungen**

Ein Süßwarenunternehmen stell verschiedene Sorten Fruchtgummis her.

1. Luisa nimmt an einer Betriebsbesichtigung des Unternehmens teil. Zu Beginn der Führung bekommt sie ein Tütchen mit zehn Gummibärchen, von denen fünf weiß, zwei rot und drei grün sind. Luisa öffnet das Tütchen und nimmt, ohne hinzusehen, drei Gummibärchen heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Gummibärchen die gleiche Farbe haben. **(3BE)**

Erster Lösungsvorschlag:

$$P(\text{"3 gleiche"}) = \overbrace{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}}^{P(\text{"3 weiße"})} + \overbrace{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}}^{P(\text{"3 grüne"})} = \frac{11}{120} \approx 0{,}09167 = 9{,}167\%$$

Zweiter Lösungsvorschlag:

$$P(\text{"3 gleiche"}) = \frac{\overbrace{\binom{5}{3}\binom{3}{0}\binom{2}{0}}^{\text{Möglichkeiten für 3 weiße}}}{\underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{Möglichkeiten für 3 aus 10 Gummibärchen}}} + \frac{\overbrace{\binom{5}{0}\binom{3}{3}\binom{2}{0}}^{\text{Möglichkeiten für 3 grüne}}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}$$

Zurück zur Aufgabe

2. Vor dem Verpacken werden die verschiedenfarbigen Gummibärchen in großen Behältern gemischt, wobei der Anteil der roten Gummibärchen 25% beträgt. Ein Verpackungsautomat füllt jeweils 50 Gummibärchen aus einem der großen Behälter in eine Tüte.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Tüte mehr als ein Drittel der Gummibärchen rot ist. **(3BE)**

$p_{rot} = 0{,}25$

$n = 50$

$k = 17 \quad (\frac{1}{3}\cdot 50 \approx 16{,}67)$

k	$P(X \le k)$
…	…
15	0,83692
16	0,90169
17	0,94488

$$P_{0,25}^{50}(X \ge 17) = 1 - P_{0,25}^{50}(X \le 16) = 1 - \sum_{i=0}^{16} B(50;0{,}25;i) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0{,}90169 = 0{,}09831$$

Zurück zur Aufgabe

b) Um sicherzustellen, dass jeweils genau 50 Gummibärchen in eine Tüte gelangen, fallen diese einzeln nacheinander aus einer Öffnung des Behälters in den Verpackungsautomaten. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann: **(2BE)**

$$\sum_{k=0}^{3}(0{,}75^k \cdot 0{,}25)$$

$$\sum_{k=0}^{3}(0{,}75^k \cdot 0{,}25) = \overbrace{0{,}25}^{\substack{genau\ das\ erste\\ ist\ rot}} + \overbrace{0{,}75^1 \cdot 0{,}25}^{\substack{genau\ das\ zweite\\ ist\ rot}} + \overbrace{0{,}75^2 \cdot 0{,}25}^{\substack{genau\ das\ dritte\\ ist\ rot}} + \overbrace{0{,}75^3 \cdot 0{,}25}^{\substack{genau\ das\ vierte\\ ist\ rot}}$$

A: „Unter den ersten vier Gummibärchen ist mindestens ein rotes dabei.“
oder
A: „Spätestens das vierte Gummibärchen ist rot.“

Zurück zur Aufgabe

c) Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der gelben Gummibärchen in der Produktion mindestens sein muss, damit in einer zufällig ausgewählten Tüte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein gelbes Gummibärchen enthalten ist. **(4BE)**

$$\begin{aligned}
P(\text{"mindestens ein gelbes Bärchen"}) &\geq 0{,}95 \\
1 - P(\text{"kein gelbes Bärchen"}) &\geq 0{,}95 \\
1 - \underbrace{\binom{50}{0}}_{=1}\underbrace{p^0}_{=1}(1-p)^{50} &\geq 0{,}95 \\
-(1-p)^{50} &\geq 0{,}95 && |-1 \\
-(1-p)^{50} &\geq -0{,}05 && |\cdot(-1) \\
(1-p)^{50} &\leq 0{,}05 \\
1-p &\leq 0{,}05^{\frac{1}{50}} && |-1 \\
-p &\leq -0{,}05816 && |\cdot(-1) \\
p &\geq 0{,}05816
\end{aligned}$$

A: Der Anteil der Gummibärchen muss mindestens 5,82% Prozent betragen.

Zurück zur Aufgabe

3. Das Süßwarenunternehmen produziert auch zuckerreduzierte und vegane Fruchtgummis und bringt diese in entsprechend gekennzeichneten Tüten in den Handel.

Der Anteil der nicht als vegan gekennzeichneten Tüten ist dreimal so groß wie der Anteil der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind. 42% der Tüten, die als vegan gekennzeichnet sind, sind zusätzlich auch als zuckerreduziert gekennzeichnet. Insgesamt sind 63% der Tüten werden weder als vegan noch als zuckerreduziert gekennzeichnet.

Betrachtet werden folgende Ereignisse:

V: „Eine zufällig gewählte Tüte ist als vegan gekennzeichnet."

R: „Eine zufällig ausgewählte Tüte ist als zuckerreduziert gekennzeichnet."

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\bar{R}$. **(3BE)**

	V	$\bar{V}$	
R	$0{,}42 \cdot p$		
$\bar{R}$			
	p	$3p$	1

Wir stellen mithilfe der untersten Zeile eine Gleichung auf und können damit p bestimmen.

$$p + 3p = 1$$
$$4p = 1$$
$$p = 0{,}25$$

	V	$\bar{V}$	
R	$0{,}42 \cdot 0{,}25 = 0{,}105$	$0{,}12$	$0{,}225$
$\bar{R}$	$0{,}58 \cdot 0{,}25 = 0{,}145$	$0{,}63$	$0{,}775$
	$0{,}25$	$0{,}75$	1

→ $P(\bar{R}) = 0{,}775$

Zurück zur Aufgabe

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{V}}(R)$. **(3BE)**

	V	$\bar{V}$	
R	$0{,}105$	$0{,}12$	$0{,}225$
$\bar{R}$	$0{,}145$	$0{,}63$	$0{,}775$
	$0{,}25$	$0{,}75$	1

$$P_{\bar{V}}(R) = \frac{P(R \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{0{,}12}{0{,}75} = 0{,}16 = 16\%$$

Zurück zur Aufgabe

c) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P_{\bar{V}}(R)$ im Sachzusammenhang. **(2BE)**

$P_{\bar{V}}(R) = 0{,}16$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass unter den nicht veganen Tüten eine als zuckerreduziert gekennzeichnet ist.

$P_{\bar{V}}(\bar{R}) = \frac{0{,}63}{0{,}75} = 0{,}84$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit unter den nicht veganen Tüten eine nicht als zuckerreduziert gekennzeichnet ist. Es gilt: $P_{\bar{V}}(\bar{R}) = 1 - P_{\bar{V}}(R)$.

Zurück zur Aufgabe

4. Bei einer Werbeaktion werden die Fruchtgummitüten Rubbellose beigelegt. Beim Freirubbeln werden auf jedem Los bis zu drei Goldäpfel sichtbar. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl an Goldäpfel, die beim Freirubbeln sichtbar werden. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

a) Die Zufallsgröße X hat den Erwartungswert 1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 und berechnen Sie die Varianz von X. **(3BE)**

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\cdot p_0 + 1\cdot p_1 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}1 \\ 0\cdot p_0 + 1\cdot p_1 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}1 &= 1 \\ p_1 + 0{,}4 + 0{,}3 &= 1 \\ p_1 + 0{,}7 &= 1 \qquad |-0{,}7 \\ p_1 &= 0{,}3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 &= 1 \\ p_0 + 0{,}6 &= 1 \qquad |-0{,}6 \\ p_0 &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Varianz von X

Erste Möglichkeit:

$Var(X) = 0^2\cdot 0{,}4 + 1^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}1 - 1^2 = 1$

Zweite Möglichkeit:

$Var(X) = (0-1)^2\cdot 0{,}4 + (1-1)^2\cdot 0{,}3 + (2-1)^2\cdot 0{,}2 + (3-1)^2\cdot 0{,}1 = 1$

Zurück zur Aufgabe

b) Ohne Kenntnis des Erwartungswerts ist die Varianz in der Regel nicht aussagekräftig. Daher wird für den Vergleich verschiedener Zufallsgrößen oft der Quotient aus der Standardabweichung und dem Erwartungswert betrachtet, der als relative Standardabweichung bezeichnet wird.
Die Zufallsgröße Y_n beschreibt die Anzahl der Goldäpfel, die beim Freirubbeln von n Losen sichtbar werden. Es gilt $E(Y_n) = n$ und $Var(Y_n) = n$. Bestimmen Sie den Wert von n, für den die relative Standardabweichung 5% beträgt. **(2BE)**

$$\sigma_{rel}(Y_n) = \frac{\sigma(Y_n)}{E(Y_n)} = \frac{\sqrt{Var(Y_n)}}{E(Y_n)} = 5\%$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{Var(Y_n)}}{E(Y_n)} &= 5\% \\ \frac{\sqrt{n}}{n} &= 0{,}05 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0{,}05 \qquad |\cdot\sqrt{n} \\ 1 &= 0{,}05\cdot\sqrt{n} \qquad |:0{,}05 \\ \sqrt{n} &= 20 \\ n &= 400 \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe