Inhalt

Analysis Aufgabengruppe 1

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{6x}{x^2-4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

a) Geben Sie die Gleichung aller senkrechten Asymptoten von G_f an. Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt. **(3BE)**

Lösung S.6 | Lösungsvideo

b) Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty; -2[$, $]-2; 2[$ und $]2; +\infty[$ der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$. **(5BE)**

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{6\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$)

Lösung S.7 | Lösungsvideo

Die Punkte $A(3|3{,}6)$ und $B(8|0{,}8)$ liegen auf G_f; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Stecke $[AB]$.

c) Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem. **(4BE)**

Lösung S.8 | Lösungsvideo

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[AB]$ eingeschlossen wird. **(5BE)**

Lösung S.9 | Lösungsvideo

2. Betrachtet wird die Schar der Funktion $f_{a,b,c}: x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_{a,b,c}$.

a) Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an. **(1BE)**

Lösung S.10 | Lösungsvideo

b) Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht. **(2BE)**

Lösung S.10 | Lösungsvideo

c) Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $\mathbb{D}_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist. **(3BE)**

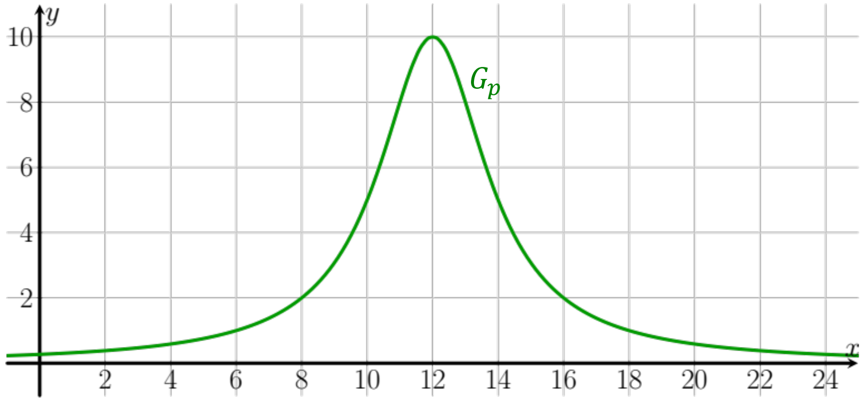
Lösung S.10 | Lösungsvideo

d) Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2+2bx-ac}{(x^2+c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte. **(4BE)**

Lösung S.10 | Lösungsvideo

3. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p: x \mapsto \frac{40}{(x-12)^2+4}$; die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



a) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto \frac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist. **(4BE)**

Lösung S.12 Lösungsvideo

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40% Ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt. **(4BE)**

Lösung S.13 Lösungsvideo

c) Die Funktion p besitzt im Intervall $[4; 12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an. **(2BE)**

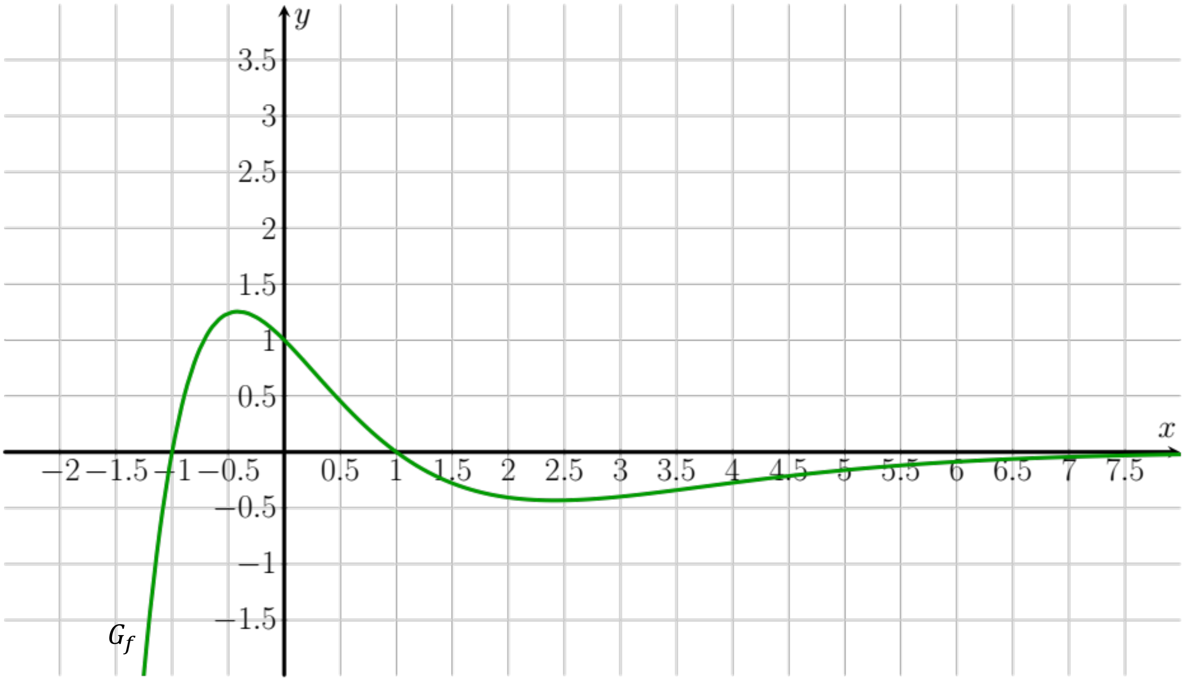
Lösung S.13 Lösungsvideo

d) Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).
Die in $[4; 20]$ definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.
Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $x \in [4; 20]$.
Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält. **(3BE)**

Lösung S.14 Lösungsvideo

Analysis Aufgabengruppe 2

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto (1-x^2)\cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



a) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt. **(2BE)**

Lösung S.15 Lösungsvideo

b) Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)\cdot e^{-x}$)

Lösung S.16 Lösungsvideo

c) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$. **(4BE)**

Lösung S.16 Lösungsvideo

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

d) Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt. **(2BE)**

Lösung S.17 Lösungsvideo

e) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3{,}5$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2$ gilt. **(3BE)**

Lösung S.17 Lösungsvideo

f) Deuten Sie die Aussagen $F(2{,}5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch. **(2BE)**

Lösung S.18 Lösungsvideo

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k: x \mapsto (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet. Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f.

g) Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an. **(2BE)**

Lösung S.19 Lösungsvideo

h) Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert. **(3BE)**

Lösung S.19 Lösungsvideo

i) Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen. **(2BE)**

Lösung S.20 Lösungsvideo

2. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definiert Funktion $g: x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0; 1[$ besitzt. (zur Kontrolle: $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$) **(5BE)**

Lösung S.21 Lösungsvideo

b) Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W\left(0 \middle| g(0)\right)$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein. **(3BE)**

Lösung S.21 Lösungsvideo

c) Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $]-1; 1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an. **(2BE)**

Lösung S.22 Lösungsvideo

d) Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x-Achse im Bereich $-ln3 \leq x \leq b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y-Achse dieses Flächenstück halbiert. **(6BE)**

Lösung S.23 Lösungsvideo

Analysis Aufgabengruppe 1 **Lösungen**

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{6x}{x^2-4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

a) Geben Sie die Gleichung aller senkrechten Asymptoten von G_f an. Begründen Sie, dass G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote besitzt. **(3BE)**

senkrechte Asymptote(n):
Befinden sich potenziell an den Stellen an denen die zugehörige Funktion ihre Definitionslücken hat.

→ $x = -2; x = 2;$

waagrechte Asymptote(n):
Findet man potenziell, wenn man $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ betrachtet.

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{1000} = 0{,}001 \qquad \frac{1}{10000} = 0{,}0001$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{6}^{\to 6}}{\underbrace{x\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}_{\to+\infty}} = 0^+$$

Es gilt: $Zählerpotenz < Nennerpotenz$ → $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{6}^{\to 6}}{\underbrace{x\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}_{\to-\infty}} = 0^-$$

→ Die waagrechte Asymptote liegt auf der x-Achse.
(Die waagrechte Asymptote liegt bei $y = 0$.)

Zurück zur Aufgabe

b) Bestimmen Sie das jeweilige Monotonieverhalten von f in den drei Teilintervallen $]-\infty;-2[$, $]-2;2[$ und $]2;+\infty[$ der Definitionsmenge. Berechnen Sie zudem die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$. **(5BE)**

(zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{6\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$)

$$f'(x) = \frac{N \cdot AZ - Z \cdot AN}{N^2}$$

$$f(x) = \frac{6x}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 24 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2-24}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

x	$]-\infty;-2[$	$x=-2$	$]-2;2[$	2	$]2;+\infty[$
$-6(x^2+4)$	$---$	n.D.	$---$	n.D.	$---$
$(x^2-4)^2$	$+++$	n.D.	$+++$	n.D.	$+++$
$f'(x)$	$---$	n.D.	$---$	n.D.	$---$
G_f	↘		↘		↘

Begründung: $(x^2+4) > 0$ für alle x, da x^2 nicht negativ werden kann. →$-6(x^2+4)$

$(x^2-4)^2 > 0$ für alle x, da Werte quadriert nicht negativ sein können.

G_f ist streng monoton fallend in den Intervallen $]-\infty;-2[$, $]-2;2[$ und $]2;+\infty[$.

Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0|f(0))$:

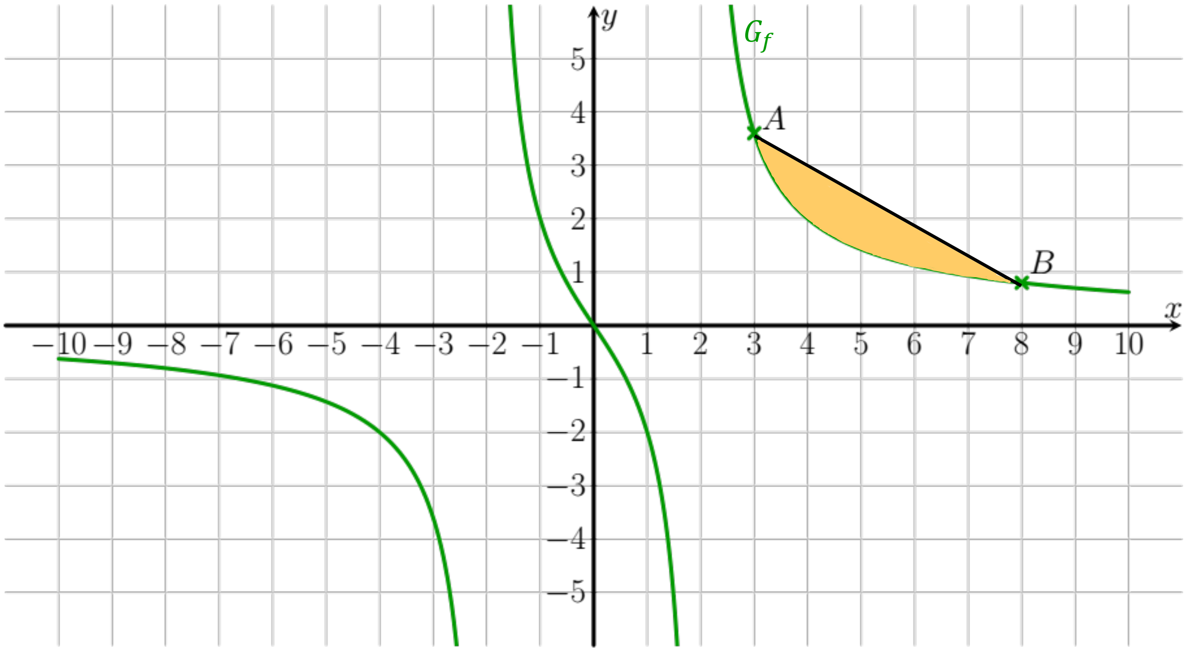
Die Steigung kann immer anhand der ersten Ableitung bestimmt werden.

$$f'(0) = \frac{-6(0^2+4)}{(0^2-4)^2} = \frac{-6\cdot 4}{4^2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Zurück zur Aufgabe

Die Punkte $A(3|3{,}6)$ und $B(8|0{,}8)$ liegen auf G_f; zwischen diesen beiden Punkten verläuft G_f unterhalb der Stecke $[AB]$.

c) Skizzieren Sie G_f im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ unter Verwendung der bisherigen Informationen in einem Koordinatensystem. **(4BE)**



Zurück zur Aufgabe

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der Strecke $[AB]$ eingeschlossen wird. **(5BE)**

Um den Flächeninhalt zu berechnen, müssen wir zunächst die Geradengleichung zur Gerade durch AB bestimmen.

Link: Video zum Bestimmen von Geradengleichungen

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0{,}8-3{,}6}{8-3} = \frac{-2{,}8}{5} = -0{,}56$

→ $g: y = -0{,}56x + t$

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes (z.B. Punkt A) erhält man t.

$3{,}6 = -0{,}56 \cdot 3 + t$

$3{,}6 = -1{,}68 + t \qquad |+1{,}68$

$t = 5{,}28$

→ $g: y = -0{,}56x + 5{,}28$

Die gesuchte Fläche liegt zwischen der Gerade AB und dem Graphen von f, deswegen muss das Integral über die Differenz der Funktionsterme berechnet werden.

$h(x) = x^2 - 4$

$h'(x) = 2x$

$$\int_3^8 \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_3^8 \left(-0{,}56x + 5{,}28 - \frac{3 \cdot 2x}{x^2-4}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{0{,}56}{2}x^2 + 5{,}28x - 3 \cdot \ln|x^2-4|\right]_3^8$$

$$= -\frac{0{,}56}{2} \cdot 8^2 + 5{,}28 \cdot 8 - 3 \cdot \ln|8^2-4| - \left(-\frac{0{,}56}{2} \cdot 3^2 + 5{,}28 \cdot 3 - 3 \cdot \ln|3^2-4|\right)$$

$$= -\frac{0{,}56}{2} \cdot 8^2 + 5{,}28 \cdot 8 - 3 \cdot \ln|8^2-4| - \left(-\frac{0{,}56}{2} \cdot 3^2 + 5{,}28 \cdot 3 - 3 \cdot \ln|3^2-4|\right)$$

$$= -17{,}92 + 42{,}24 - 3 \cdot \ln(60) - (-2{,}52 + 15{,}84 - 3 \cdot \ln(5))$$

$$= 24{,}32 - 3 \cdot \ln(60) - (13{,}32 - 3 \cdot \ln(5))$$

$$\approx 3{,}545$$

Zurück zur Aufgabe

2. Betrachtet wird die Schar der Funktion $f_{a,b,c}\colon x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_{a,b,c}$.

a) Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an. **(1BE)**

$f(x) = \frac{6x}{x^2-4}$ → $a = 6; b = 0; c = -4;$

Zurück zur Aufgabe

b) Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht. **(2BE)**

$f_{0,b,c}(x) = \frac{b}{x^2+c}$

$f_{0,b,c}(-x) = \frac{b}{(-x)^2+c} = \frac{b}{x^2+c} = f_{0,b,c}(x)$

→ $G_{f_{0,b,c}}$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse Achse.
Da $b \neq 0$ gilt $f_{0,b,c}(x) \neq 0$ und damit hat $G_{f_{0,b,c}}$ keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Allgemein:

$f(-x) = f(x)$ → G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$f(-x) = -f(x)$ → G_f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Zurück zur Aufgabe

c) Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $\mathbb{D}_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist. **(3BE)**

$f_{a,b,c}(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$

Zu $\mathbb{D}_{a,b,c} = \mathbb{R}$:

$x^2 + c = 0 \quad |-c$

$x^2 = -c$

Keine Lösung für $c > 0$. → Für $c > 0$ gilt: $\mathbb{D}_{a,b,c} = \mathbb{R}$.

Zur Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprungs:

$f_{a,b,c}(-x) = \frac{a(-x)+b}{(-x)^2+c} = \frac{-ax+b}{x^2+c} = \frac{-(ax-b)}{x^2+c} = -\frac{ax-b}{x^2+c}$

Für $b = 0$ gilt:

$f_{a,b,c}(-x) = \frac{-ax}{x^2+c} = -\frac{ax}{x^2+c} = -f_{a,b,c}(x)$

→ $G_{f_{0,b,c}}$ ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

G_f wäre identisch mit der x-Achse, wenn $f_{a,b,c}(x) = 0$ gelten würde. Das ist für $a = 0$ der Fall. Also muss $a \neq 0$ gelten.

Zurück zur Aufgabe

d) Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2+2bx-ac}{(x^2+c)^2}$.
Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte. **(4BE)**

Der Graph von $f_{a,b,c}$ hat genau dann zwei Extrempunkte, wenn die Ableitung zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

$f'_{a,b,c}(x) = 0$

$-\frac{ax^2+2bx-ac}{(x^2+c)^2} = 0 \qquad | \cdot [-(x^2+c)^2]$

$ax^2 + 2bx - ac = 0$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Hier: $x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2-4\cdot a\cdot(-ac)}}{2a}$

Die Gleichung hat genau dann zwei Lösungen, wenn die Diskriminante größer als 0 ist.
$D > 0$
$(2b)^2 - 4a(-ac) > 0$
$4b^2 + 4a^2c > 0$
Es gilt $4b^2 \geq 0$ und wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt (vgl. Angabe), dann folgt $4a^2c > 0$ und damit gilt dann

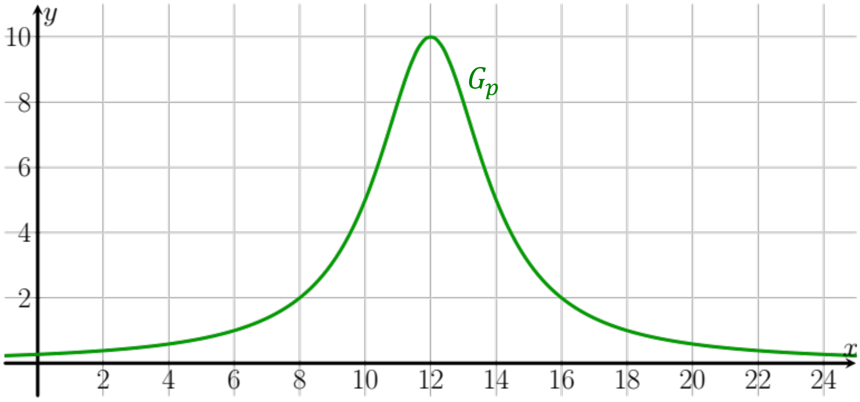
$$4b^2 + 4a^2c > 0,$$

womit die Ableitungsfunktion dann genau zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

Zurück zur Aufgabe

Link: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

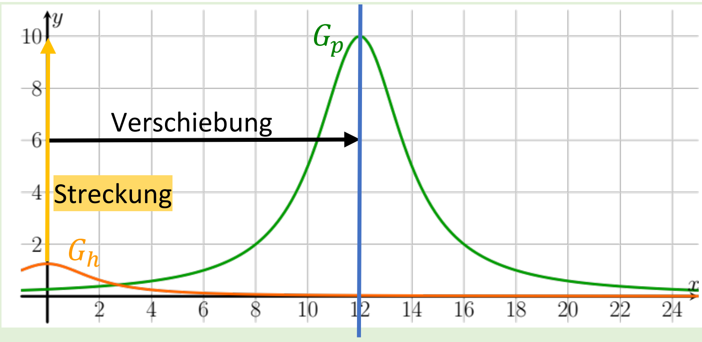
3. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $p: x \mapsto \frac{40}{(x-12)^2+4}$; die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p.



a) Beschreiben Sie, wie G_p aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto \frac{5}{x^2+4}$ schrittweise hervorgeht, und begründen Sie damit, dass G_p bezüglich der Gerade mit der Gleichung $x = 12$ symmetrisch ist. **(4BE)**

$p(x) = 8 \cdot \frac{5}{(x-12)^2+4}$

Der Graph von G_p geht aus dem Graphen von G_h hervor
durch Streckung um den Faktor 8 in y-Achsenrichtung und
Verschiebung, um den Wert $+12$ in x-Achsenrichtung.



Da $h(-x) = h(x)$ gilt, ist der Graph G_h von h achsensymmetrisch zur y-Achse. Die Verschiebung des Graphen um den Wert $+12$ in x-Achsenrichtung verschiebt dabei auch Symmetrieachse um den Wert $+12$ in x-Achsenrichtung. Die Streckung in y-Richtung hat keinen Einfluss auf die Lage der Symmetrieachse.

Hinweis:
Wird jeder Funktionswert mit dem Wert 8 multipliziert, dann wird jeder y-Wert einer Funktion um das 8-fache vergrößert (vgl. auch Graphen).
Wird statt jedem x, der Ausdruck $(x - c)$ in einen Funktionsterm geschrieben, dann wird der Graph um den Wert 12 in x-Achsenrichtung verschoben.

Zurück zur Aufgabe

Eine auf einem Hausdach installierte Photovoltaikanlage wandelt Lichtenergie in elektrische Energie um. Für $4 \leq x \leq 20$ beschreibt die Funktion p modellhaft die zeitliche Entwicklung der Leistung der Anlage an einem bestimmten Tag. Dabei ist x die seit Mitternacht vergangene Zeit in Stunden und $p(x)$ die Leistung in kW (Kilowatt).

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit am Nachmittag auf Minuten genau, ab der die Leistung der Anlage weniger als 40% Ihres Tageshöchstwerts von 10 kW beträgt. **(4BE)**

$p(x) = \frac{40}{(x-12)^2+4}$

$p(x) < 40\% \cdot 10$

$p(x) < 4$

$\frac{40}{(x-12)^2+4} < 4 \qquad |\cdot ((x-12)^2+4)$

$40 < 4 \cdot ((x-12)^2+4)$

$40 < 4 \cdot (x^2 - 24x + 144) + 16$

$40 < 4x^2 - 96x + 576 + 16 \qquad |-40$

$4x^2 - 96x + 552 > 0 \qquad |:4$

$x^2 - 24x + 138 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 1 \cdot 138}}{2 \cdot 1} = \frac{24 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$x_1 = \frac{24-\sqrt{24}}{2} \approx 9{,}55$ (Vormittag)

$x_2 = \frac{24+\sqrt{24}}{2} \approx 14{,}45$ (Nachmittag)

$0{,}45h = 0{,}45 \cdot 60min = 27min$

Die Leistung der Anlage beträgt ab 14:27 Uhr weniger als 40% des Tageshöchstwertes von 10kW.

Zurück zur Aufgabe

c) Die Funktion p besitzt im Intervall $[4; 12]$ eine Wendestelle. Geben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang an. **(2BE)**

Die Wendestelle beschreibt eine Nullstelle der zweiten Ableitung mit Vorzeichenwechsel ($f''(x) = 0$).

Nullstellen mit Vorzeichenwechsel einer Funktion beschreiben immer Extremstellen der zugehörigen "aufgeleiteten" Funktion. Also beschreibt die Wendestelle eine Extremstelle der ersten Ableitung.

$f(x)$	N	E	W		
$f'(x)$		N	E	W	
$f''(x)$			N	E	W

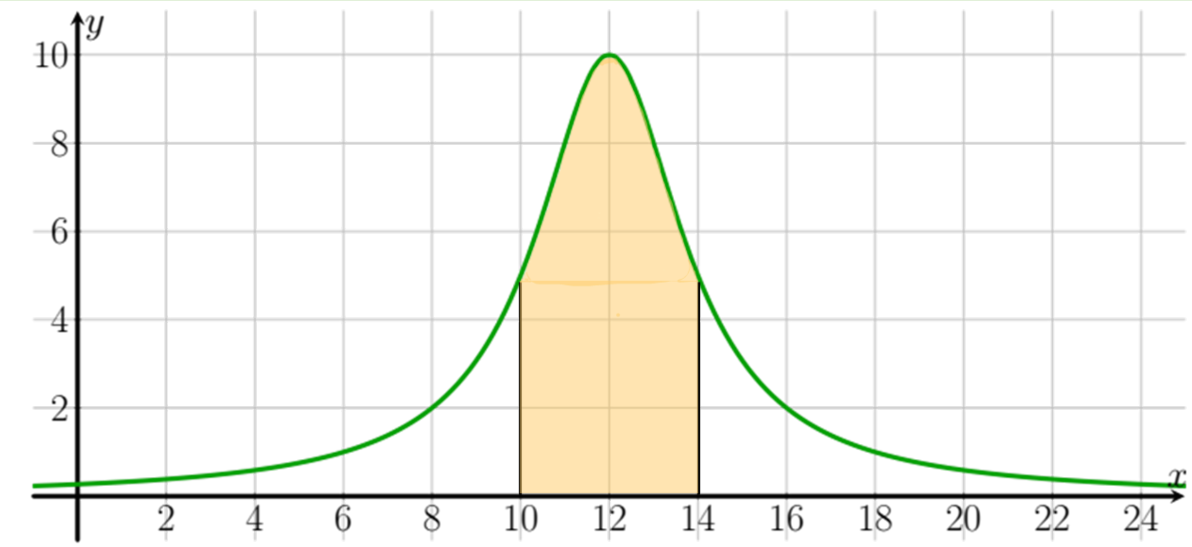
Die erste Ableitung beschreibt die Zunahme bzw. die Abnahme der Werte, also hier die Zunahme der Leistung.

➔ Die Wendestelle beschreibt die Stelle der stärksten Zunahme der Leistung.

Zurück zur Aufgabe

d) Die von der Anlage produzierte elektrische Energie wird vollständig in das Stromnetz eingespeist. Der Hauseigentümer erhält für die eingespeiste elektrische Energie eine Vergütung von 10 Cent pro Kilowattstunde (kWh).
Die in $[4; 20]$ definierte Funktion $x \mapsto E(x)$ gibt die elektrische Energie in kWh an, die die Anlage am betrachteten Tag von 4:00 Uhr bis x Stunden nach Mitternacht in das Stromnetz einspeist.
Es gilt $E'(x) = p(x)$ für $x \in [4; 20]$.
Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Vergütung, die der Hauseigentümer für die von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr in das Stromnetz eingespeiste elektrische Energie erhält. **(3BE)**

Gesucht ist $\int_{10}^{14} p(x)\,dx$. Also wird die Fläche unter dem Graphen G_p von p im Bereich von $x = 10$ bis $x = 14$ gesucht.

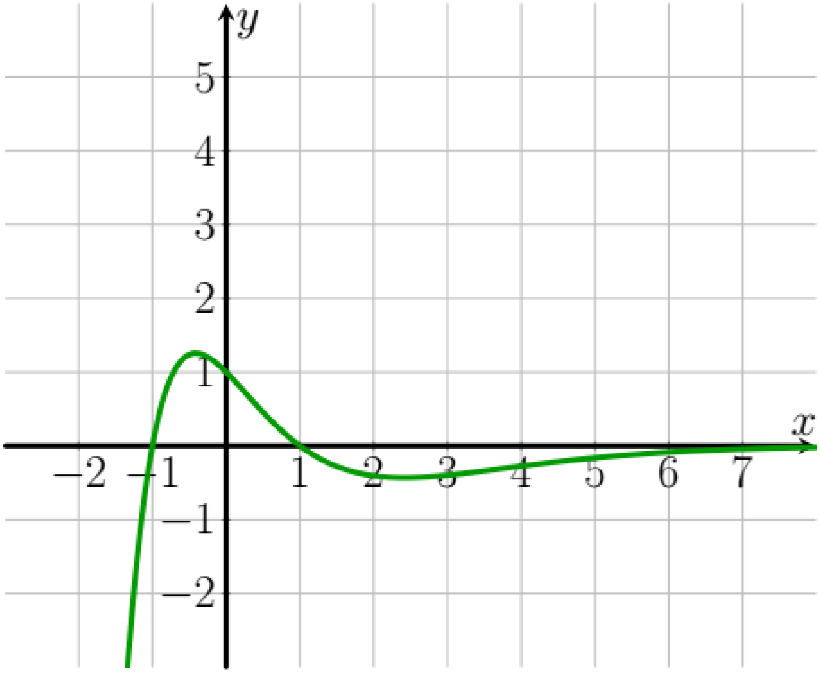


Graphisch können wir die Fläche bestimmen, indem wir den Flächeninhalt eines Kästchens bestimmen und anschließend die Anzahl der zugehörigen Kästchen abschätzen.
$A_{Kästchen} = 2 \cdot 2 = 4$ (kWh)
Geschätzte Anzahl der Kästchen: $6 + 2 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}25 = 7{,}7$
Gesuchte Fläche: $A_{gesamt} = 7{,}7 \cdot 4 = 30{,}8$ (kWh)
Da man 10 Cent pro kWh erhält gilt für die Gesamtvergütung V:
$V = 30{,}8 \cdot 0{,}1€ = 3{,}08€$

Zurück zur Aufgabe

Analysis Aufgabengruppe 2 **Lösungen**

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto (1-x^2) \cdot e^{-x}$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.



a) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt. **(2BE)**

$$\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$$

$f(x) = 0$

$(1-x^2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

$1 - x^2 = 0 \qquad |+x^2$

$x^2 = 1$

$x_1 = -1; x_2 = 1$; (jeweils einfach)

Zurück zur Aufgabe

b) Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_f. **(4BE)**
(zur Kontrolle: $f'(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$)

$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x} + (1 - x^2) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x} - (1 - x^2) \cdot e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} \cdot (-2x - (1 - x^2))$

$f'(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$

$f'(x) = 0$

$(x^2 - 2x - 1) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

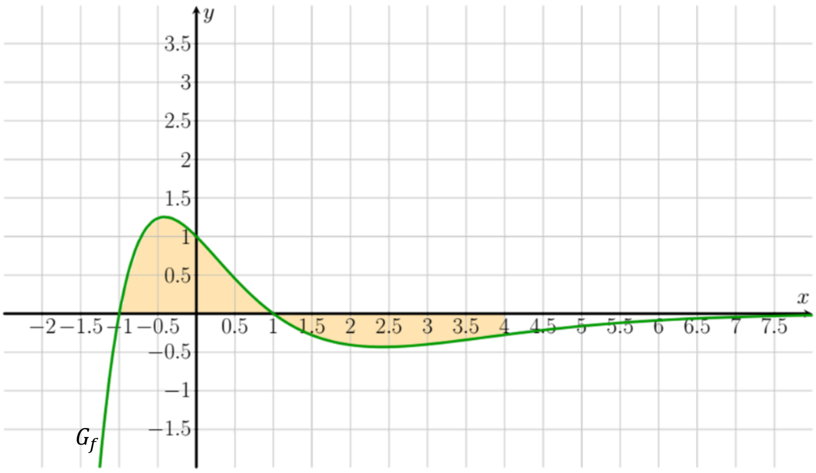
$x^2 - 2x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ (jeweils einfach)

$x_1 = 1 - \sqrt{2}; x_2 = 1 + \sqrt{2};$

Zurück zur Aufgabe

c) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen Näherungswert für das Integral $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$. **(4BE)**



Graphisch können wir die Fläche bestimmen, indem wir den Flächeninhalt eines Kästchens bestimmen und anschließend die Anzahl der zugehörigen Kästchen abschätzen.

$A_{Kästchen} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25\ (LE^2)$

Das Integral gibt eine Flächenbilanz an. Das bedeutet, dass vom abgeschätzten Flächeninhalt oberhalb der x-Achse, der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse abgezogen werden muss.

Anzahl Kästchen oberhalb der x-Achse: $3 + 0{,}9 + 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}5 = 6$

Anzahl Kästchen unterhalb der x-Achse: $0{,}25 + 0{,}75 + 0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}75 + 0{,}6 = 4{,}15$

Gesuchtes Integral:

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \left(\overbrace{6}^{oberhalb\ der\ x-Achse} - \underbrace{4{,}15}_{unterhalb\ der\ x-Achse} \right) \cdot 0{,}25 = 0{,}4625$$

Zurück zur Aufgabe

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $T(-1|2)$ verläuft.

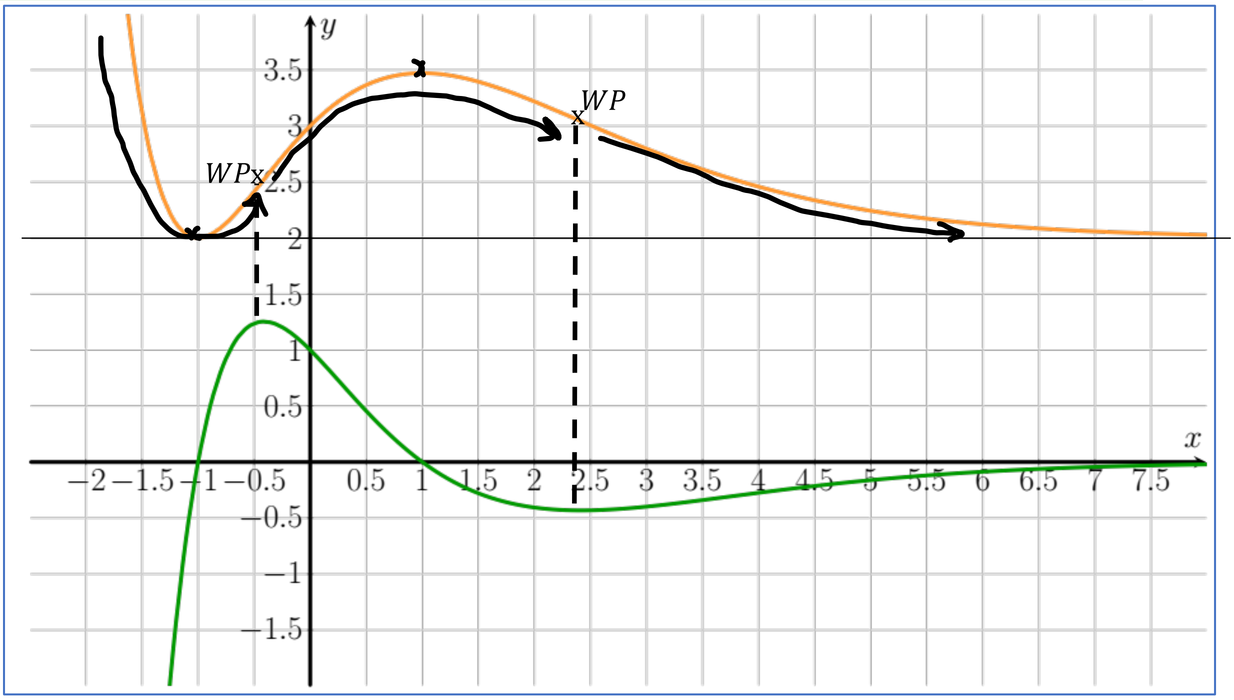
d) Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass der Graph von F im Punkt T einen Tiefpunkt besitzt. **(2BE)**

Da G_f an der Stelle $x = -1$ die x-Achse schneidet, folgt, dass f an der Stelle $x = -1$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.
Da f die Ableitungsfunktion von F ist, bedeutet das, dass G_F an dieser Stelle einen Extrempunkt besitzt.
Da das Vorzeichen von f an dieser Stelle von – nach + wechselt, handelt es sich um einen Tiefpunkt von G_F.

Zurück zur Aufgabe

e) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von F. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere, dass $F(1) \approx 3{,}5$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$ gilt. **(3BE)**

Wichtige Punkte:
$T(-1|2)$: Tiefpunkt aus Aufgabe 1d)
$H(1|3{,}5)$: gegebener Hochpunkt (Der Graph von f schneidet an dieser Stelle die x-Achse)
An den Stellen $x \approx -0{,}4$ und $x \approx 2{,}4$ hat der Graph von f Extrempunkte. Hier muss G_F Wendepunkte besitzen.



Zurück zur Aufgabe

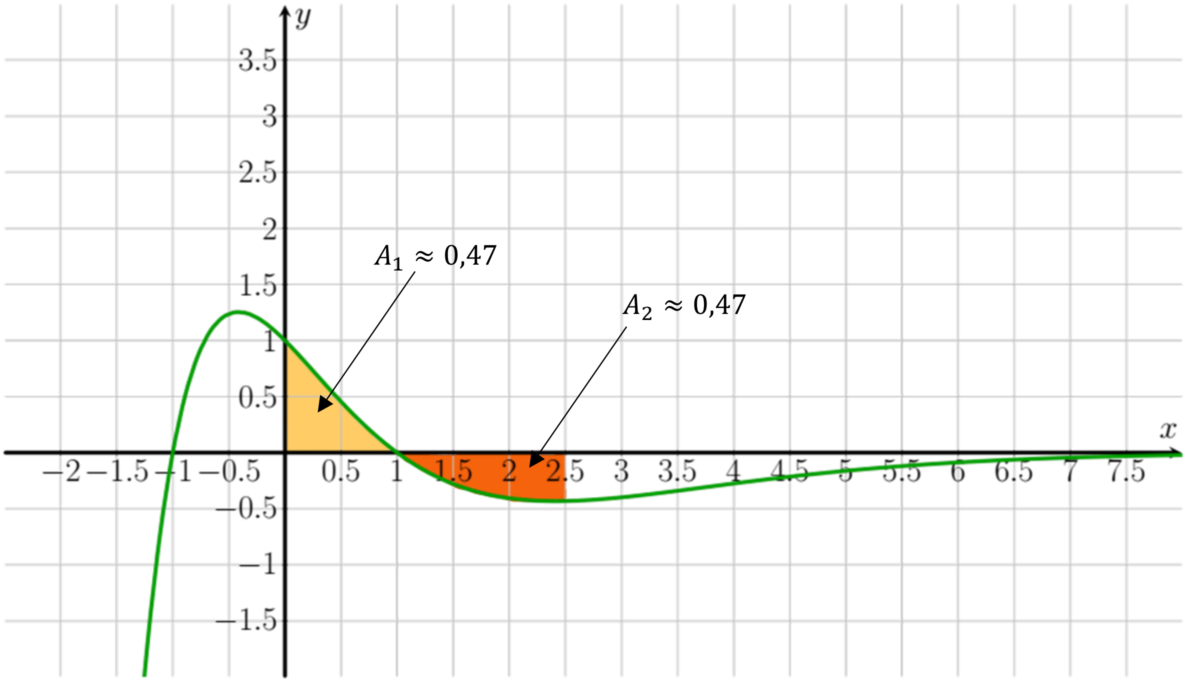
f) Deuten Sie die Aussagen $F(2{,}5) - F(0) \approx 0$ in Bezug auf G_f geometrisch. **(2BE)**

Mit dem bestimmen Integral wird eine Flächenbilanz berechnet. Hier gilt:

$\int_0^{2,5} f(x)\,dx = F(2{,}5) - F(0) = 0$

Die Flächenbilanz ist also 0.

Interpretation: Die Fläche zwischen G_f und x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 1$ (gelbe Fläche) hat den gleichen Flächeninhalt, wie die Fläche zwischen G_f und x-Achse zwischen $x = 1$ und $x = 2{,}5$ (orange Fläche). Daher ist die Flächenbilanz aus beiden Flächen gleich 0.



Zurück zur Aufgabe

Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k: x \mapsto (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet. Für $k = 1$ ergibt sich die bisher betrachtete Funktion f.

g) Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von h_k an. **(2BE)**

$h_k(x) = (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$

$h_k(x) = 0$

$(1 - kx^2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

$1 - kx^2 = 0 \quad |+kx^2$

$kx^2 = 1 \quad |: k$ (für $k \neq 0$)

$x^2 = \frac{1}{k}$

Für $k \leq 0$ hat diese Gleichung keine Lösung und damit h_k auch keine Nullstellen.

Für $k > 0$ gilt:

→ $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{k}}$; $x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}}$; (jeweils einfach)

Zurück zur Aufgabe

h) Für einen bestimmten Wert von k besitzt G_k zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 4 haben. Berechnen Sie diesen Wert. **(3BE)**

Abstand der Nullstellen:

$x_2 - x_1 = \sqrt{\frac{1}{k}} - \left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\right) = \sqrt{\frac{1}{k}} + \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\sqrt{\frac{1}{k}}$

$2\sqrt{\frac{1}{k}} = 4 \quad |: 2$

$\sqrt{\frac{1}{k}} = 2 \quad |\ ^2$

$\frac{1}{k} = 4 \quad |\cdot k$

$1 = 4k \quad |: 4$

$k = \frac{1}{4}$

Zurück zur Aufgabe

i) Beurteilen Sie, ob es einen Wert von k gibt, sodass G_k und G_f bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen. **(2BE)**

$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$

$h_k(x) = (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$

Spiegelung an der x-Achse, wenn $f(x) = -h_k(x)$

$(1 - x^2) \cdot e^{-x} = -(1 - kx^2) \cdot e^{-x} \qquad | \cdot e^x$

$1 - x^2 = -(1 - kx^2)$

$1 - x^2 = -1 + kx^2 \qquad |+1$

$2 - x^2 = kx^2$

Falls: $x = 0$

$2 = 0$ ↯

→ Für $x = 0$ gibt es keinen Wert k, sodass $f(x) = -h_k(x)$ gilt.

(Für $x \neq 0$
$2 - x^2 = kx^2 \qquad |: x^2$

$\frac{2-x^2}{x^2} = k$
Man muss einen festen Wert k finden, für den die Gleichung $f(x) = -h_k(x)$ erfüllt ist. So einen Wert gibt es hier nicht, da nach dem Auflösen k in Abhängigkeit von x ist.)

Zusatz außerhalb der Aufgabe:
Beispiel, bei dem es ein passendes k gäbe:

$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$

$g_k(x) = (k + x^2) \cdot e^{-x}$

$f(x) = -g_k(x)$

$(1 - x^2) \cdot e^{-x} = -(k + x^2) \cdot e^{-x}$

$1 - x^2 = -k - x^2 \qquad |+x^2$

$1 = -k \qquad | \cdot (-1)$

$k = -1$

→ Für $k = -1$ liegen G_{g_k} und G_f bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen.

Zurück zur Aufgabe

2. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definiert Funktion $g: x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass g streng monoton zunehmend ist und die Wertemenge $]0;1[$ besitzt. (zur Kontrolle: $g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$) **(5BE)**

$$g'(x) = \frac{(e^x+1)\cdot e^x - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\overbrace{e^x}^{>0}}{\underbrace{(e^x+1)^2}_{>0}} > 0 \quad \rightarrow \quad g \text{ ist streng monoton zunehmend.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x+1}_{\to 1}} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0^+}} = 1^-$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{NAZ - ZAN}{N^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\frac{1}{10} = 0{,}1$$

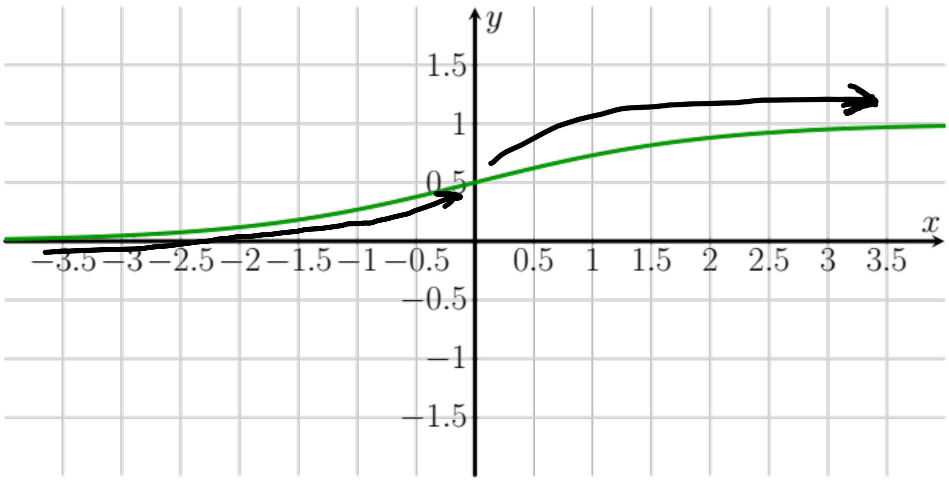
$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$\frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$\frac{1}{10000} = 0{,}0001$$

Zurück zur Aufgabe

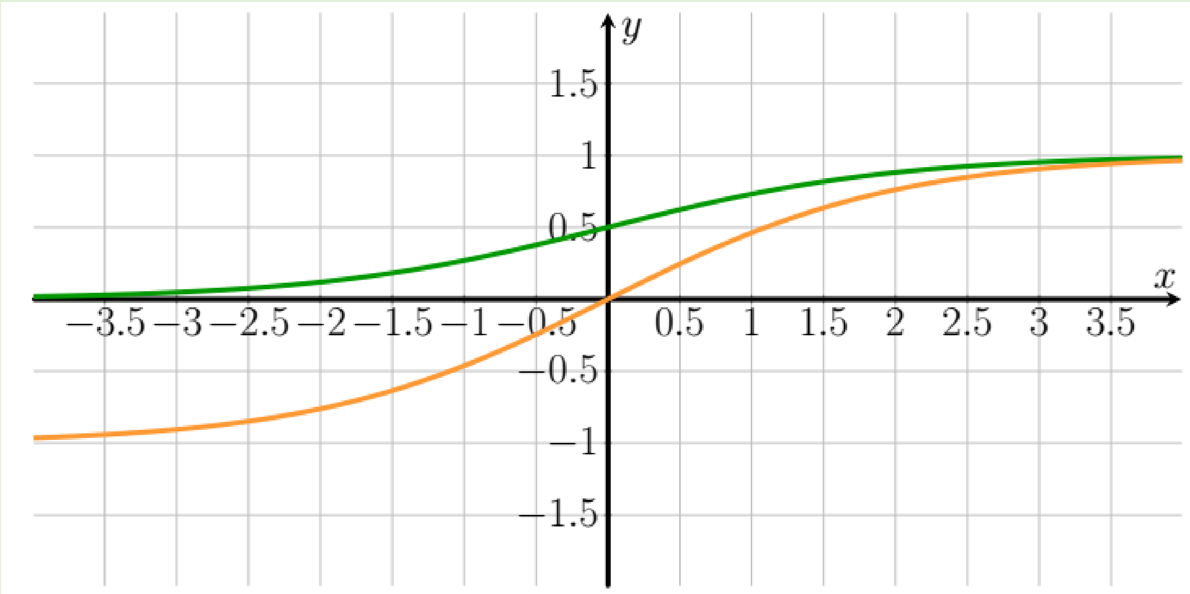
b) Geben Sie $g'(0)$ an und zeichnen Sie G_g im Bereich $-4 \le x \le 4$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und der Tatsache, dass G_g in $W(0|g(0))$ seinen einzigen Wendepunkt hat, in ein Koordinatensystem ein. **(3BE)**



Zurück zur Aufgabe Link: Wertemenge bestimmen

c) Der Graph der Funktion g^* geht aus G_g durch Strecken und Verschieben hervor. Die Wertemenge von g^* ist $]-1;1[$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für g^* an. **(2BE)**

Beispiel: $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$; $g^*(x) = 2 \cdot \frac{e^x}{e^x+1} - 1$;
Der Graph von g^* geht dann aus G_g hervor durch Streckung in Richtung der y-Achse, um den Faktor 2 und Verschiebung in y-Achsenrichtung um den Wert -1.



Zurück zur Aufgabe

d) Es wird das Flächenstück zwischen G_g und der x-Achse im Bereich $-ln3 \leq x \leq b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ betrachtet. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass die y-Achse dieses Flächenstück halbiert. **(6BE)**

Das bestimmte Integral entspricht hier dem Flächenstück, da sich der Graph ausschließlich oberhalb der x-Achse befindet.
Der Flächeninhalt der Fläche links von der y-Achse muss dem Flächeninhalt der Fläche rechts von der y-Achse entsprechen (vergleiche Aufgabenstellung).
Damit gilt:

$$\int_{-\ln(3)}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{b} g(x)\,dx$$

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$G(x) = \ln|e^x+1| + C$$

$$[\ln\ |e^x+1|]_{-\ln(3)}^{0} = [\ln\ |e^x+1|]_0^b$$

$$\ln|e^0+1| - \ln\left|e^{-\ln(3)}+1\right| = \ln\left|e^b+1\right| - \ln\ |e^0+1|$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$\ln|2| - \ln\left|e^{\ln(3^{-1})}+1\right| = \ln\left|e^b+1\right| - \ln\ |2|$$

$$\ln|2| - \ln\left|\frac{1}{3}+1\right| = \ln\left|e^b+1\right| - \ln\ |2| \qquad |+\ln|2|$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$$

$$2 \cdot \ln|2| - \ln\left|\frac{4}{3}\right| = \ln\left|e^b+1\right|$$

$$\ln|2^2| - \ln\left|\frac{4}{3}\right| = \ln\left|e^b+1\right|$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left|\frac{2^2}{\frac{4}{3}}\right| = \ln\left|e^b+1\right|$$

$$\ln\left|4 \cdot \frac{3}{4}\right| = \ln\left|e^b+1\right|$$

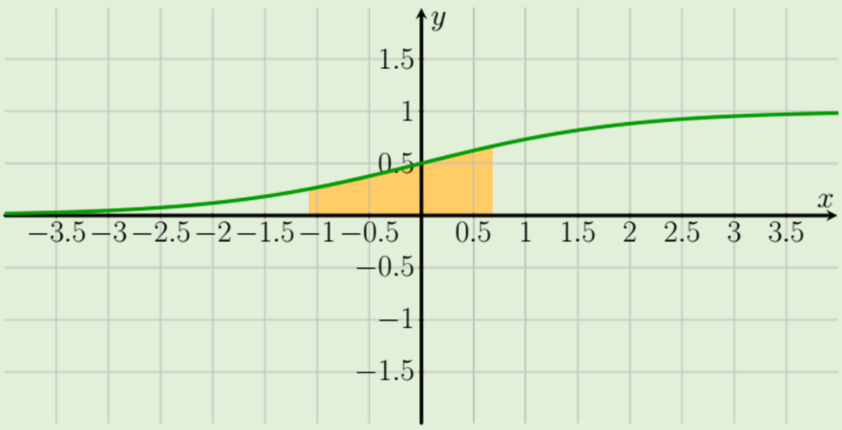
$$\ln|3| = \ln\left|e^b+1\right|$$

$$\rightarrow e^b + 1 = 3 \qquad |-1$$

$$e^b = 2 \qquad |ln$$

$$\ln(e^b) = \ln(2)$$

$$b = \ln(2)$$



Zurück zur Aufgabe