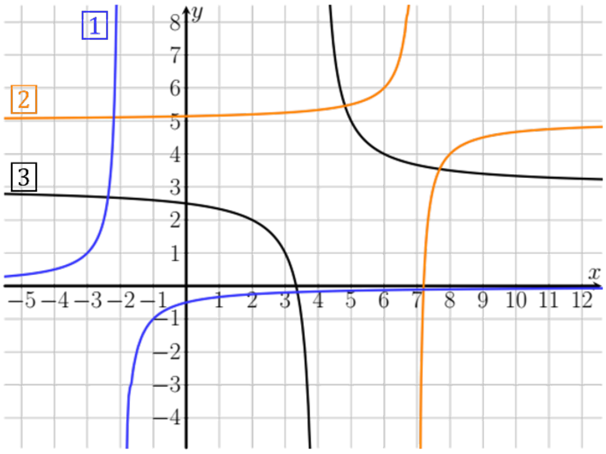
Übungen: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von Hyperbeln

Aufgabe 1: Gegeben sind im Folgenden drei Graphen von elementar gebrochen-rationalen Funktionen.

a) Bestimme die Gleichungen der Asymptoten jedes Graphen graphisch. (Hilfe dazu erhältst du durch Klicken auf den Text oder scannen des QR-Codes)

b) Bestimme die Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen jedes Graphen graphisch.

c) Bestimme die Wertemenge der Funktionen graphisch. (Hilf dazu gibt es hier)



Aufgabe 2: Gegeben sind im Folgenden die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen Funktionen f_1 bis f_8.

a)	$f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$	b)	$f_2(x) = \frac{1{,}5}{x-1} + 2$	c)	$f_3(x) = \frac{1}{x+1{,}5} - 0{,}5$	d)	$f_4(x) = -\frac{1}{x-1}$
e)	$f_5(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2x-4} + 4$	f)	$f_6(x) = \frac{0{,}1}{x} - \frac{1}{4}$	g)	$f_7(x) = \frac{3}{x-2} + 8$	h)	$f_8(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2x+6} + 4$

(1) Gib die maximal mögliche Definitionsmenge an.

(2) Gib die Gleichungen der Asymptoten des Graphen der jeweiligen Funktion an. (Hilfe zu a) und b) erhältst du durch Klicken auf den Text oder scannen des QR-Codes)

(3) Zeichne die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und f_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem. (Bereich des Koordinatensystems: $-5 \leq x \leq 5$; $-5 \leq y \leq +5$)

(4) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von f_1, f_2 und f_3 mit den Koordinatenachsen graphisch.

(5) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von f_1, f_2 und f_3 mit den Koordinatenachsen rechnerisch und vergleiche deine Ergebnisse mit denen aus Aufgabe (5).

(6) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen von f_4 bis f_8 rechnerisch.

(7) Überlege dir die Funktionsgleichung zu einer Funktion g der Form $g(x) = \frac{a}{x-b} + c$ ($a \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$; $b, c \in \mathbb{Q}$), indem du dir selber Werte für a, b und c aussuchst. Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von g mit den Koordinatenachsen rechnerisch. Überprüfe deine Ergebnisse anschließend indem du den Graphen von einer DGS zeichnen lässt. Stelle deine Aufgabe der Klasse vor.

Aufgabe 3: Entscheide jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Begründe deine Wahl mit fachlichen Argumenten.

a) Der Graph jeder elementar gebrochen-rationalen Funktion mit maximaler Definitionsmenge hat einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

b) Der Graph jeder elementar gebrochen-rationalen Funktion mit maximaler Definitionsmenge hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse.

c) Um den Schnittpunkt mit der x-Achse zu bestimmen, muss für x der Wert 0 in die Funktionsgleichung eingesetzt werden.

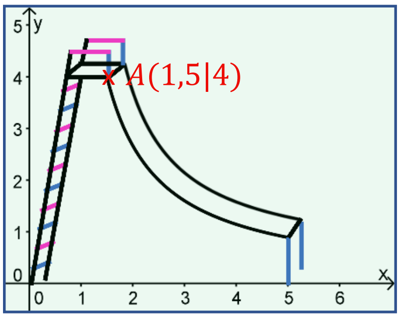
Klicke hier oder verwende den QR-Code, um deine Ergebnisse zu überprüfen.

Übungen: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von Hyperbeln

Aufgabe 4: Erstelle mithilfe einer dynamischen Geometrie-Software (DGS) den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x-b}+c$ ($b,c\in\mathbb{Q}$). Die Werte b und c sollen dabei durch zwei Schieberegler variabel verändert werden können. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet. Gib jeweils einen Wert für b und c an, der die folgenden Bedingungen erfüllt. Es können auch mehrere Lösungen korrekt sein.
(Beispiel: G_f soll die y-Achse an der Stelle $y=1$ schneiden.
 mögliche Lösung: $b=2$, $c=1$; mögliche andere Lösung: $b=-1$, $c=1$)

a) G_f schneidet die y-Achse an der Stelle $y=2$.
b) G_f schneidet die y-Achse an einer Stelle $y>-1$.
c) G_f hat nur einen Schnittpunkt mit y-Achse, nicht aber mit der x-Achse.
d) G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x=3$.
e) G_f hat nur einen Schnittpunkt mit der x-Achse, nicht aber mit der y-Achse.
f) G_f schneidet beide Achsen nicht.

Aufgabe 5: Die kleine Karla geht gerne rutschen. Ihr fällt auf, dass man den Querschnitt der Rutsche an ihrem Lieblingsspielplatz mithilfe des Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion f beschreiben kann. Zeichnet man den Graphen komplett in ein Koordinatensystem, dann hat dieser eine senkrechte Asymptote bei $x=0{,}5$ und eine waagrechte Asymptote bei $y=0$.



a) Gib für die Funktion f mit $f(x)=\frac{a}{x-b}+c$ Werte für die Variablen b und c an, die die Bedingungen von oben erfüllen. (Hilfe dazu hier)
b) Der Punkt $A(1{,}5|4)$ liegt auf dem oben beschriebenen Graphen. Bestimme mithilfe der in a) erstellten Funktionsgleichung die Variable a und gib $f(x)$ an.
c) Gib eine sinnvolle Definitions- und Wertemenge für f an.

Aufgabe 6: Ermittle die Funktionsgleichung einer gebrochen-rationalen Funktion f mit den folgenden Eigenschaften.

a) Der Graph von f hat eine senkrechte Asymptote bei $x=-1$, eine waagrechte Asymptote bei $y=2$ und geht durch den Punkt $P(3|3)$.
b) Der Graph von f hat eine senkrechte Asymptote bei $x=3$, eine waagrechte Asymptote bei $y=0{,}5$ und geht durch den Punkt $P(1|4)$.
c) Der Graph von f schneidet die y-Achse an der Stelle $y=1$, hat eine senkrechte Asymptote bei $x=1$ und eine waagrechte Asymptote bei $y=-2$.
d) Formuliere eine eigene Aufgabe, auf die Art wie a) bis c) gestellt sind, und löse diese.

Aufgabe 7: Gegeben sind die auf ihrem maximalen Definitionsbereich gegebenen Funktionen f_1 bis f_4. Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der jeweiligen Graphen der Funktionen, falls möglich. Gib eine fachliche Begründung für die Graphen an, für die dies nicht möglich ist. Verwende dabei den Begriff „Asymptote".

a)	$f_1(x)=\frac{1}{4x}+1$	b)	$f_2(x)=\frac{3}{x-2}+2$	c)	$f_3(x)=\frac{4}{x+2{,}5}$

Übungen: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen von Hyperbeln

Aufgabe 8: Gib jeweils eine Funktionsgleichung einer gebrochen-rationalen Funktion f mit maximalem Definitionsbereich an, dessen Graph G_f die angegebenen Eigenschaften erfüllt.

a) G_f schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 1$.

b) G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 2$.

c) Der Punkt $P(2|2)$ liegt auf G_f und G_f schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 0$.

Aufgabe 9: Gegeben sind im Folgenden Eigenschaften von Funktionen f_1 bis f_8. Entscheide jeweils, welche der Funktionen zu welchen Funktionstermen gehören.

- Der Graph von f_1 schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 1$.
- Der Graph von f_2 schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 4$.
- Der Graph von f_3 schneidet die y-Achse bei $y = 0$ und die x-Achse bei $x = 0$.
- Der Graph von f_4 schneidet die y-Achse bei $y = 3$ und die x-Achse bei $x = 1{,}5$.
- Der Graph von f_5 schneidet die y-Achse bei $y = 0{,}5$ und die x-Achse nicht.
- Der Graph von f_6 schneidet die x-Achse bei $x = -2$ und die y-Achse bei $y = 1{,}5$.

(1)	$T(x) = -\frac{1}{x-1} + 2$	(2)	$T(x) = \frac{1{,}5}{x-1} - 0{,}5$	(3)	$T(x) = -\frac{1}{x-2}$
(4)	$T(x) = \frac{4}{x+2} - 2$	(5)	$T(x) = \frac{1{,}5}{2x+2} + 0{,}75$	(6)	$T(x) = \frac{2}{x-2} + 2$

Aufgabe 10: Erstelle mithilfe einer dynamischen Geometrie-Software (DGS) den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x-b} + c$ $(b, c \in \mathbb{Q})$. Die Werte b und c sollen dabei durch zwei Schieberegler variabel verändert werden können. Der Graph von f wird dabei mit G_f bezeichnet. Gib jeweils das maximale Intervall für b und c an, das die folgenden Bedingungen erfüllt. (Beispiel: Der Graph soll die y-Achse an einer Stelle $y > 1$ schneiden.
Lösung: $b \in \mathbb{Q}$, $c \in]1; +\infty[$)

a) G_f schneidet die y-Achse an einer Stelle $y > 3$.

b) G_f schneidet die y-Achse an einer Stelle $y \leq -1$.

c) G_f schneidet die y-Achse nicht.

d) G_f schneidet die x-Achse nicht.

e) G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 11: Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ und $g(x) = \frac{-2}{x-1} + 1$.

a) Gib die maximale Definitionsmenge der Funktionen f und g an.

b) Gib die Gleichungen aller waagrechten und senkrechten Asymptoten der Graphen von f und von g an.

c) Bestimme die Achsenschnittpunkte der Graphen von f und von g.

d) Zeichne die Graphen der Funktionen f und g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein gemeinsames Koordinatensystem. (Bereich des Koordinatensystems: $-5 \leq x \leq 5$; $-5 \leq y \leq +5$)

e) Lies den Schnittpunkt der eingezeichneten Graphen ab.

f) Überprüfe dein Ergebnis aus e) durch eine Rechnung.