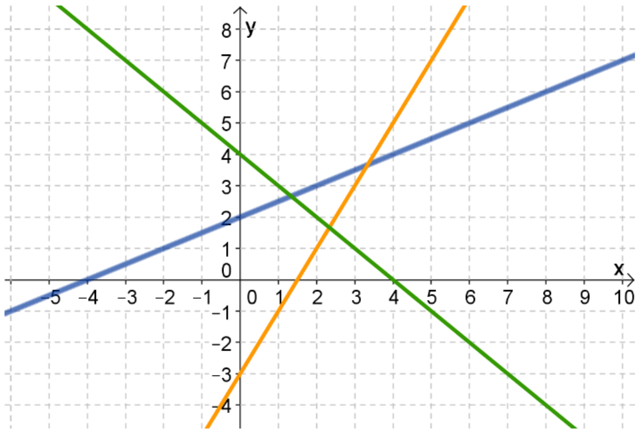
Lineare Funktionen

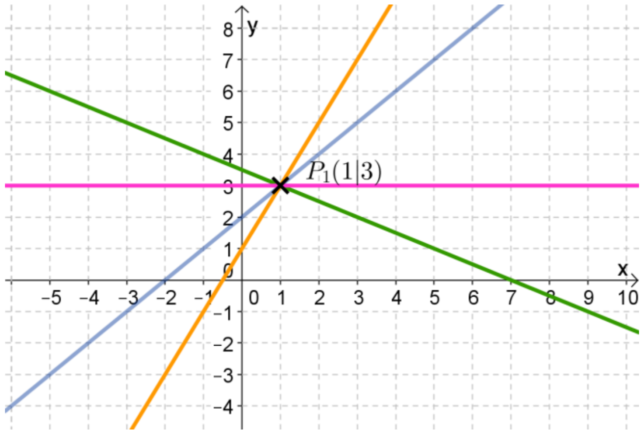
Geradengleichungen aufstellen

Zunächst einmal soll es um die Frage gehen, wie viele Informationen benötigt werden, um eine Gerade eindeutig in ein Koordinatensystem zeichnen zu können.

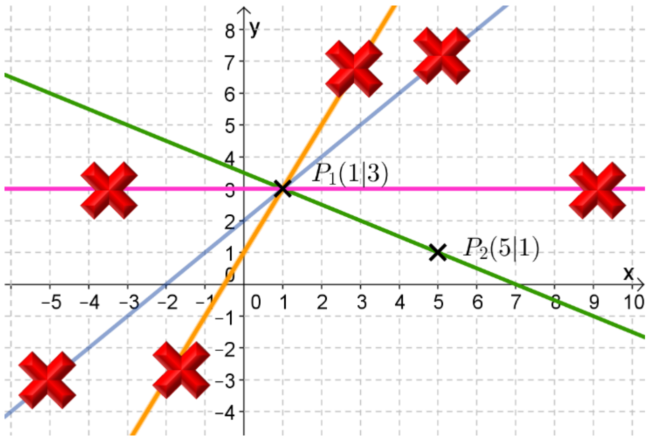


Wenn keine Informationen gegeben sind, dann können willkürlich Geraden in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.

Ist zum Beispiel festgelegt, dass die Gerade durch den Punkt $P_1(1|3)$ gehen muss, dann ist die Auswahl bereits beschränkter.

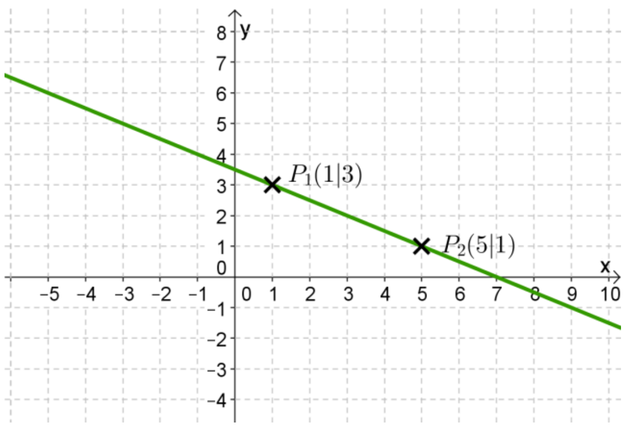


Wird zusätzlich die Bedingung gestellt, dass die Gerade auch durch den Punkt $P_2(5|1)$ gehen soll, dann bleibt nur noch eine mögliche Gerade übrig.



Merke:

Um eine Gerade eindeutig festzulegen, müssen mindestens zwei Punkte (oder „bedeutsame Informationen") der Gerade gegeben sein.



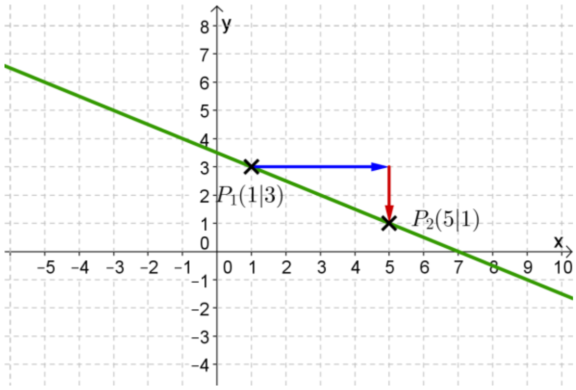
Wenn es darum geht eine Geradengleichung aufzustellen, dann muss dazu immer die allgemeine Geradengleichung (vgl. „Die allgemeine Geradengleichung“) betrachtet werden:

$$y = m \cdot x + t$$

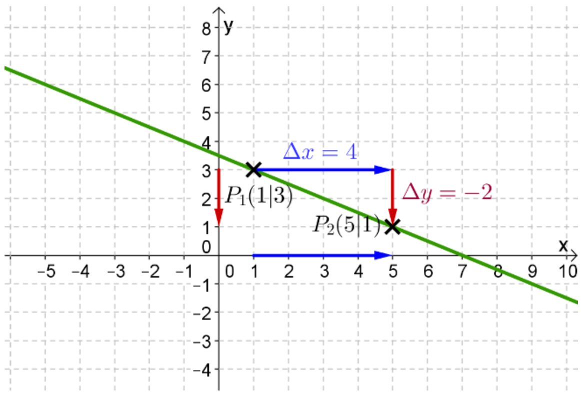
Mit Hilfe der Angaben werden im Folgenden die Werte der Variablen m und t bestimmt.

Es gibt zwei Arten, die zugehörige Geradengleichung mit Hilfe der gegebenen Punkte $P_1(1|3)$ und $P_2(5|1)$ zu bestimmen.

1. Wir zeichnen zunächst das zu den zwei Punkten zugehörige Steigungsdreieck ein (Hinweis: Das Steigungsdreieck wäre eigentlich durch Strecken und nicht durch Pfeile beschrieben).

   Nun können wir die zu Δx und Δy zugehörigen Werte ablesen.

   Überträgt man die eingezeichneten Pfeile auf die jeweiligen Achsen, so kann die Länge der Pfeile einfach abgelesen werden. Durch die Pfeilrichtung wird das jeweilige Vorzeichen vorgegeben:

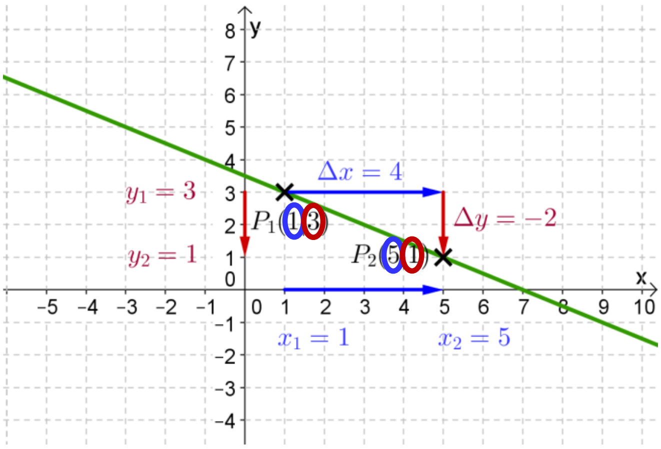
   - Zeigt der Pfeil in die Richtung der positiven Achse (wie in unserem Beispiel der blaue Pfeil), dann ist das Vorzeichen positiv. Der Pfeil zeigt in diesem Fall in die Richtung, in der am Rand eine positive Zahl steht.

- Zeigt der Pfeil in Richtung der negativen Achse (wie in unserem Beispiel der rote Pfeil), dann ist das Vorzeichen negativ. Der Pfeil zeigt also in die Richtung, in der am Rand eine negative Zahl steht.

Dann gilt für die Steigung m, wie im Kapitel „Zeichnen von Geraden, Steigungsdreieck und y-Achsenabschnitt“ gelernt:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

Allgemein kann die Steigung auch mit Hilfe der Koordinaten der Punkte ausgerechnet werden.



Über die Differenz der x-Koordinaten der Punkte $P_1(1|3)$ und $P_2(5|1)$ kann $\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - 1 = 4$ bestimmt werden.

Über die Differenz der y-Koordinaten der Punkte $P_1(1|3)$ und $P_2(5|1)$ kann $\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - 3 = -2$ bestimmt werden.

Es ist üblich, dass bei den Wertepaaren immer von den Koordinaten des weiter rechts liegenden Punktes (das ist der Punkt mit der größeren x-Koordinate) die Koordinaten des weiter links liegenden Punktes subtrahiert werden. Aber auch, wenn man die x- und y-Werte paarweise vertauscht, erhält man den korrekten Steigungswert.

Damit können wir m bereits in unsere Funktionsgleichung einsetzen:

$y = -\frac{1}{2}x + t$

Wir müssen nun noch t bestimmen. Wie im Kapitel „Zeichnen von Geraden“ erläutert, können die Koordinaten jedes Punktes jeweils Wertepaaren x und y aus einer Wertetabelle zugeordnet werden.

Der jeweilige y-Wert kann berechnet werden, indem der x-Wert in die Funktionsgleichung eingesetzt wird.

Dadurch weiß man, dass die Koordinaten des Punktes $P_1(1|3)$ in die Funktionsgleichung eingesetzt werden können, um die Gleichung zu erfüllen:
$3 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + t$

Dadurch kann nun auf die Variable t geschlossen werden. Damit man für y den Wert 3 erhält, muss die Variable t gleich 3,5 sein.
Dies kann auch ausgerechnet werden:
$3 = -\frac{1}{2} + t \qquad | + \frac{1}{2}$
$t = 3{,}5$

Damit haben wir die Funktionsgleichung, die zu dem Graphen am Anfang der Aufgabe gehört, rechnerisch bestimmt:
$y = -\frac{1}{2}x + 3{,}5$

2. Eine zweite Art die Funktionsgleichung zu bestimmen erhält man mit Hilfe der allgemeinen Geradengleichung ($y = mx + t$).
Die zugehörigen Wertepaare der Punkte $P_1(1|3)$ und $P_2(5|1)$ müssen die Funktionsgleichung erfüllen. Man kann die Punkte also jeweils in die Funktionsgleichung einsetzen und muss dann herausfinden für welche Werte von m und von t die Gleichungen erfüllt werden. Es gilt:
(I) $3 = m \cdot 1 + t$
(II) $1 = m \cdot 5 + t$

Um nun die Lösung zu erhalten können wir beide Gleichungen nach t auflösen. Dazu muss m bzw. $5m$ beidseitig subtrahiert werden:
(I) $3 = m + t \qquad | - m$
$3 - m = t$
(II) $1 = m \cdot 5 + t \qquad | - 5m$
$1 - 5m = t$

Wenn nun t gleich $3 - m$, aber gleichzeitig auch $1 - 5m$ ist, dann bedeutet das, dass $3 - m$ genau den gleichen Wert beschreibt, wie $1 - 5m$.

Man kann die Terme deswegen gleichsetzen:
$3 - m = 1 - 5m$
Wir müssen nun so umstellen, dass wir den Wert m bestimmen können:
$3 - m = 1 - 5m \qquad | + 5m$
$3 + 4m = 1 \qquad | - 3$
$4m = -2 \qquad | : 4$
$m = -\frac{1}{2}$

Da wir nun m kennen, können wir diesen Wert in eine der oberen Gleichungen einsetzen und damit t bestimmen:

$$3-(-\tfrac{1}{2})=t$$

$$t=3{,}5$$

Für unsere Funktionsgleichung folgt:

$$y=-\tfrac{1}{2}x+3{,}5$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Geradengleichung der Geraden, die durch die Punkte $P_1(2|3)$ und $P_2(4|8)$ geht.

Lösung:

Wir bestimmen die Steigung m anhand der beiden Wertepaare.

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{8-3}{4-2}=\frac{5}{2}=2{,}5$ $\rightarrow y=2{,}5x+t$

Nun setzen wir einen Punkt in die Geradengleichung ein und bestimmen damit t:

$$3=2{,}5\cdot 2+t$$

$$3=5+t \qquad |-5$$

$$-2=t$$

Damit folgt für die Geradengleichung:

$$y=2{,}5x-2$$