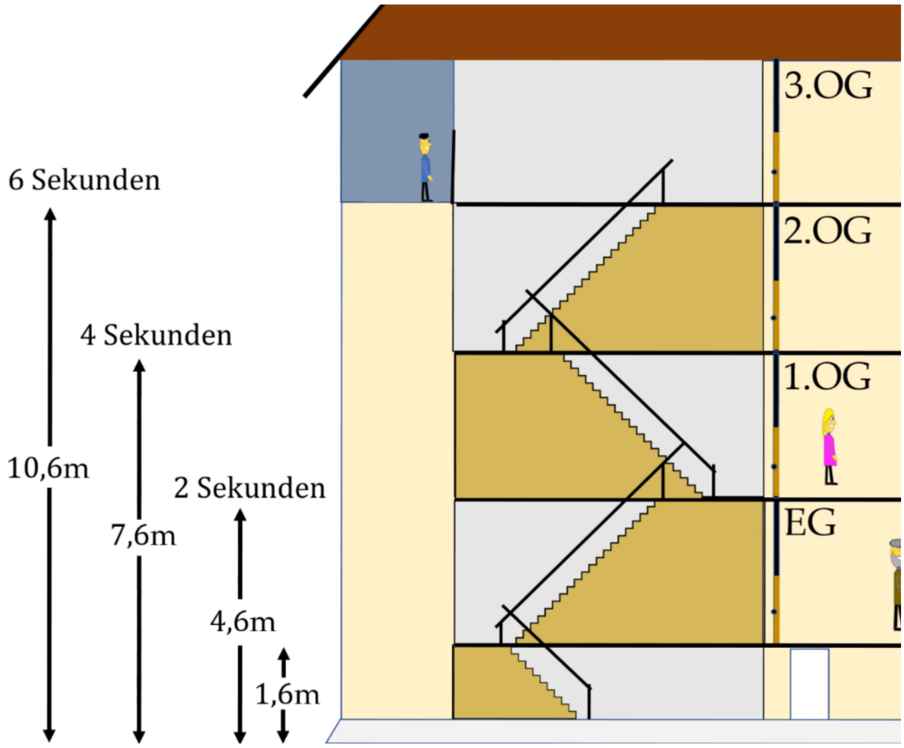
Lineare Funktionen

Die Allgemeine Geradengleichung

Beispielaufgabe:

Carl Friedrich möchte wissen, mit welcher Geschwindigkeit der Aufzug in seinem Wohnhaus durchschnittlich fährt. Er misst dafür zunächst die Zeit, die der Aufzug in seinem Hochhaus benötigt, um in das oberste Stockwerk zu fahren. Der Aufzug startet bei einer Höhe von 1,6 Metern. Weitere Werte können in der folgenden Graphik abgelesen werden.



Mit Hilfe der Aufgabenstellungen a) - e) bestimmt Carl Friedrich die Lösung.

a) Stellen Sie die Wertepaare in einer Wertetabelle dar, wobei die Zeit x in Sekunden und die aktuelle Höhe y in Metern angegeben wird.
b) Geben Sie den Höhenzuwachs nach jeweils 2 Sekunden an.
c) Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen Höhenzuwachs und entsprechend vergangener Zeit nach jeweils 2s, 4s und 6s.
d) Geben sie einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Größen x und y in der Form $y =$ _____ $\cdot x +$ ____ an.
e) Tragen Sie die Wertepaare aus Aufgabe a) in einem x-y-Koordinatensystem ein und verbinden Sie anschließend die Punkte.
f) Bestimmen Sie nun die Geschwindigkeit des Aufzugs.
g) Formulieren Sie ein Vorgehen, wie aus der Wertetabelle von a) die Funktionsgleichung einer linearen Funktion f bestimmt werden kann.

Zu a) Stellen Sie die Wertepaare in einer Wertetabelle dar, wobei die Zeit x in Sekunden und die Höhe y in Metern angegeben wird.

x in Sekunden	**0**	**2**	**4**	**6**
y in Metern	1,6	4,6	7,6	10,6

Zu b) Geben Sie den Höhenzuwachs nach jeweils 2 Sekunden an.

x in Sekunden	**0**	**2**	**4**	**6**
y in Metern	1,6	4,6	7,6	10,6
Zeitzuwachs Δx		2	2	2
Höhenzuwachs Δy		3	3	3

Zu c) Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen Höhenzuwachs und entsprechend vergangener Zeit nach jeweils 2s, 4s und 6s.

Nach 2 Sekunden haben wir einen Zuwachs von 3 Metern: $\frac{3}{2}$

Nach 4 Sekunden haben wir einen Zuwachs von 6 Metern: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Nach 6 Sekunden haben wir einen Zuwachs von 9 Metern: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Der Höhenzuwachs findet also gleichmäßig statt. Nach festen Zeitintervallen steigt der Aufzug um eine feste Höhe.

zu d) Geben sie einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Größen x und y in der Form $y = \_\_\_\_\_ \cdot x + \_\_\_\_$ an.

$y = 1{,}5 \cdot x + 1{,}6$

Merke:

Eine gegebene Funktion f mit

$f(x) = m \cdot x + t$ (allgemeine Geradengleichung)

und Definitionsmenge $\mathbb{D}$ nennt man eine lineare Funktion.

$m :=$ "Steigung"

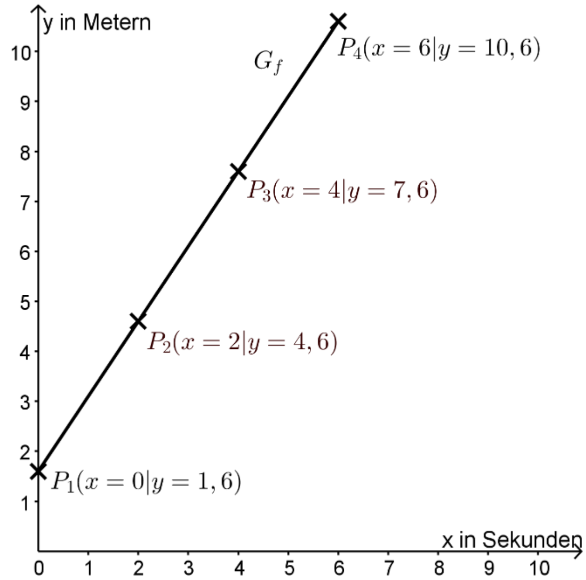
$t :=$ "y-Achsenabschnitt"

Zu e) Tragen Sie die den Wertepaaren zugehörigen Punkte aus Aufgabe a) in ein x-y-Koordinatensystem ein und verbinden Sie anschließend die Punkte.

x in Sekunden	0	2	4	6
y in Metern	1,6	4,6	7,6	10,6

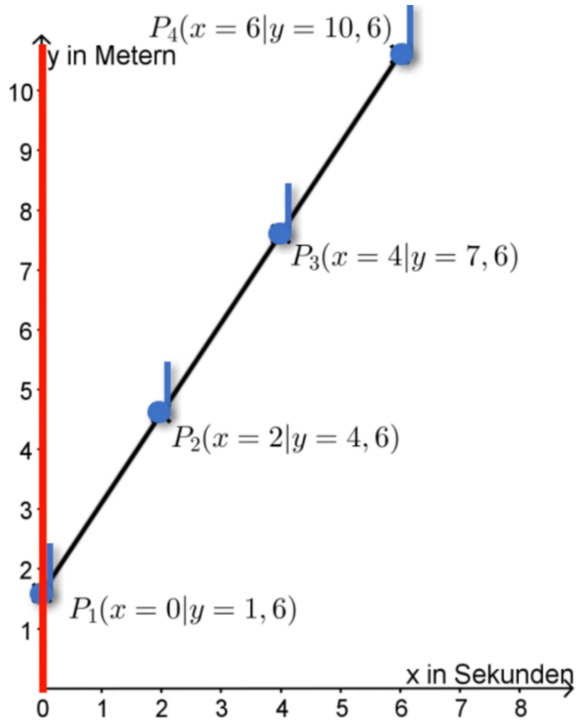
Es gilt $f(x) = 1{,}5 \cdot x + 1{,}6$

Beachte Folgendes (!):
Der Wert 1,6 aus dem Funktionsterm taucht wieder beim Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse auf.
Deswegen heißt dieser Wert y-Achsenabschnitt.

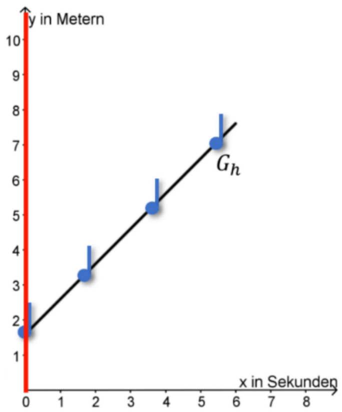


Die Steigung kann man am Graphen zunächst mit Hilfe einer Analogie anschaulich machen. Wir stellen uns vor, dass eine Tonspur abläuft und der Graph der Funktion jeweils für Töne steht, die nach einem bestimmten Zeitintervall abgespielt werden.

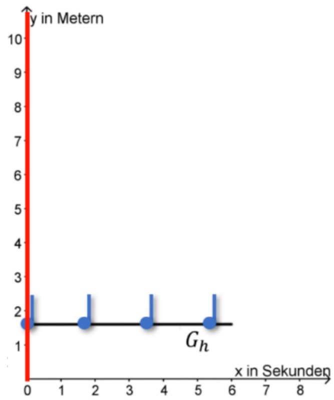
Eine Steigung von 1,5 bedeutet dann, dass nach einem festen Zeitintervall jeweils die Tonhöhe um 1,5 Töne bzw. 3 Halbtöne steigt. Man schreibt für die Steigung auch $m = 1{,}5$. Bei einer Steigung von $m = 1$ steigt die Tonhöhe damit in jedem Zeitintervall um einen Ganzton. Die Steigung $m = 0$ bedeutet, dass die Tonhöhe konstant bleibt. Und bei der Steigung $m = -\frac{1}{4}$ sinkt die Tonhöhe um jeweils einen Viertelton.



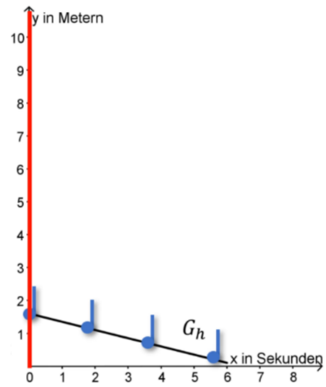
Hügel-Schule



$h(x) = \boxed{1} \cdot x + 1{,}6$



$h(x) = \boxed{0} \cdot x + 1{,}6$



$h(x) = \boxed{-\frac{1}{4}} \cdot x + 1{,}6$

Zu f) Bestimmen Sie nun die Geschwindigkeit des Aufzugs.

Dafür betrachten wir zunächst die Lösung von Aufgabe c):

nach 2 Sekunden haben wir einen Zuwachs von 3 Metern: $\frac{3}{2}$

nach 4 Sekunden haben wir einen Zuwachs von 6 Metern: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

nach 6 Sekunden haben wir einen Zuwachs von 9 Metern: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Immer wenn der Quotient aus so einer Art von Wertepaaren berechnet wird, dann bestimmt man damit die durchschnittliche Geschwindigkeit innerhalb des angegebenen Zeitraums. Da diese hier konstant (jeweils $\frac{3}{2}$ bzw. 1,5) ist, kann man direkt angeben, dass der Aufzug mit einer Geschwindigkeit von $v = 1{,}5\,\frac{m}{s}$ fährt. Die Einheit ist darin begründet, dass die Höhe y in Metern und die Zeit x in Sekunden angegeben wird. Im Alltag ist für die meisten Menschen die Einheit $\frac{km}{h}$ eher gängig, da die Geschwindigkeit auf diese Art beispielsweise beim Autofahren angegeben wird. Es gibt ein Vorgehen mit dem die oben beschriebene Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ umgerechnet werden kann.

Dabei gilt: $v = 1{,}5\,\frac{m}{s} = 3{,}6 \cdot 1{,}5\,\frac{km}{h} = 5{,}4\,\frac{km}{h}$

Zu g) Formulieren Sie ein Vorgehen, wie aus der Wertetabelle von a) die Funktionsgleichung einer linearen Funktion f bestimmt werden kann.

x in Sekunden	**0**	**2**	**4**	**6**
y in Metern	1,6	4,6	7,6	10,6

Die Steigung m erhält man, indem man die Verhältnisse der Zuwachswerte bestimmt.

x in Sekunden	**0**	**2**	**4**	**6**
y in Metern	1,6	4,6	7,6	10,6
Zeitzuwachs Δx		2	2	2
Höhenzuwachs Δy		3	3	3

Damit gilt: $m = \frac{3}{2}$

Der y-Achsenabschnitt ist der zum Zeitpunkt $x = 0$ zugehörige y-Wert also gilt $t = 1{,}6$.

Damit erhält man $y = 1,5 \cdot x + 1,6$.