Die Lösungen und das Lösungsvideo gibt es hier:

Link zu den Lösungen

Hinweis: Die Links und QR-Codes im Folgenden verweisen nicht auf die Website, sondern auf unseren You-Tube-Kanal, da man hier mit „timestamps" zu den einzelnen Aufgaben springen kann. In der gesamten Abiturprüfung ist entweder Aufgabengruppe 1 oder Aufgabengruppe 2 zu bearbeiten.

2021 Abiturprüfung Mathematik Bayern Prüfungsteil A

Analysis

Aufgabengruppe 1

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{2x+1}$. Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f. (4BE)

f ist umkehrbar, wenn jedem y-Wert genau ein x-Wert zugeordnet wird.
f ist umkehrbar, wenn f streng monoton zunehmend oder streng monoton abnehmend auf $\mathbb{D}_f$ ist.
$f'(x) = \underbrace{e^{2x+1}}_{>0} \cdot 2 > 0$ → G_f ist streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$. → f ist umkehrbar.

$y = e^{2x+1} \quad |\ln$
$\ln(y) = 2x + 1 \quad |-1$
$\ln(y) - 1 = 2x \quad |:2$
$x = \frac{\ln(y)-1}{2}$
→ $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)-1}{2}$

Lösungsvideo:

2. a) Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$. Geben Sie $\mathbb{D}_g$ und alle Nullstellen von g an. (3BE)

Mögliche Einschränkung der Definitionsmenge:

- Bruchterme (Nenner darf nicht null werden)
- Logarithmusterme (Argument muss positiv sein)
- Wurzelterme (Argument darf nicht negativ sein)

$2 - x \geq 0 \quad |+x$
$2 \geq x$
$x \leq 2$
→$\mathbb{D}_f =]-\infty; 2]$

$g(x) = 0$
$(x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x} = 0$
1. $x^2 - 9x = 0$
$x(x-9) = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 9$; (jeweils einfach)

2. $2 - x = 0$

$x_3 = 2$; (jeweils einfach)

Lösungsvideo:

b) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Begründen Sie, dass die Wertemenge von h das Intervall $]-\infty; 0]$ ist. (3BE)

Da $x^2 \geq 0$ gilt, nimmt der Nenner nur Werte zwischen 1 und $+\infty$ an.
Daraus folgt, dass der Bruch selbst nur Werte aus dem Intervall $]0; 1]$ annehmen kann.
In diesem Bereich nimmt die Logarithmusfunktion nur Werte aus dem Intervall $]-\infty; 0]$ an, womit die Wertemenge für obige Funktion erklärt werden kann.

Lösungsvideo:

3. Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

a) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ eine Stammfunktion von f ist. (2BE)

$F(x) = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$

$F(x) = -2x^{-\frac{1}{2}}$

$F'(x) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$

$F'(x) = x^{-\frac{3}{2}} = f(x)$ $\qquad -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{3}{2}$

Lösungsvideo:

b) Der Graph von f schließt mit der x-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$ mit $b > 1$ ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den dieses Flächenstück den Inhalt 1 hat. (3BE)

$\int_1^b f(x)dx = 1$

$\int_1^b f(x)dx = F(b) - F(1) = -\frac{2}{\sqrt{b}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{b}} + 2$

$-\frac{2}{\sqrt{b}} + 2 = 1 \qquad |-2$

$-\frac{2}{\sqrt{b}} = -1 \qquad |\cdot\sqrt{b}$

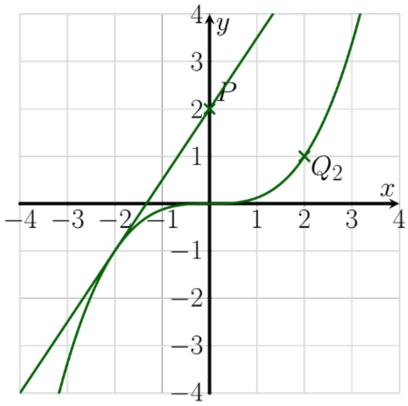
$-2 = -\sqrt{b} \qquad |\cdot(-1)$

$2 = \sqrt{b} \qquad |\ ^2$

$b = 4$

Lösungsvideo:

4. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3$ sowie die Punkte $Q_a(a|f(a))$ für $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie die Punkte $P(0|2)$ und Q_2.



a) Berechnen Sie für $a \neq 0$ die Steigung m_a der Gerade durch die Punkte P und Q_a in Abhängigkeit von a.

(zur Kontrolle: $m_a = \frac{a^3-16}{8a}$) (2BE)

Geradensteigung allgemein: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m_a = \frac{f(a)-2}{a-0} = \frac{\frac{1}{8}a^3-2}{a} \cdot \frac{8}{8} = \frac{a^3-16}{8a}$

Lösungsvideo:

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt Q_a wird mit t_a bezeichnet. Bestimmen Sie rechnerisch denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}$, für den t_a durch P verläuft. (3BE)

Steigung von Funktionsgraphen an der Stelle $x = a$: $m_a = f'(a)$

$f(x) = \frac{1}{8}x^3$

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2$

$m_a = f'(a) = \frac{3}{8}a^2$

$\frac{3}{8}a^2 = \frac{a^3-16}{8a} \quad | \cdot 8a$

$3a^3 = a^3 - 16 \quad | -a^3$

$2a^3 = -16 \quad | : 2$

$a^3 = -8 \quad | \sqrt[3]{}$

$a = -2$

ODER:

$m_a = f'(a) = \frac{3}{8}a^2$

Allgemeine Geradengleichung: $y = mx + t$

$y = \frac{3}{8}a^2x + t$

$f(a) = \frac{3}{8}a^2 \cdot a + t$

$\frac{1}{8}a^3 = \frac{3}{8}a^2 \cdot a + t \rightarrow t = -\frac{1}{4}a^3$

$y = \frac{3}{8}a^2x - \frac{1}{4}a^3$

$2 = \frac{3}{8}a^2 \cdot 0 - \frac{1}{4}a^3 \rightarrow a = -2$

Lösungsvideo:

Analysis

Aufgabengruppe 2

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ und maximalem Definitionsbereich.

   a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $2 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem. (3BE)

Wertetabelle:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	1	2			3					4

Lösungsvideo:

$f(2) = \sqrt{2-2} + 1 = \sqrt{0} + 1 = 1$

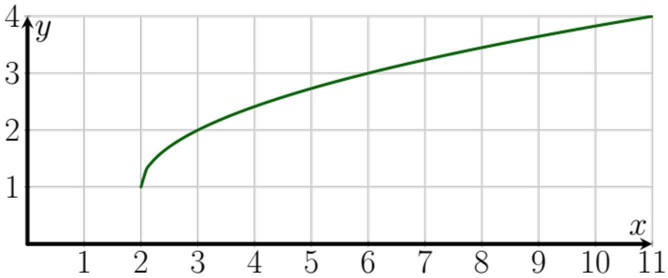
$f(3) = \sqrt{3-2} + 1 = \sqrt{1} + 1 = 2$

$f(4) = \sqrt{4-2} + 1 = \sqrt{2} + 1$

$f(5) = \sqrt{5-2} + 1 = \sqrt{3} + 1$

$f(6) = \sqrt{6-2} + 1 = \sqrt{4} + 1 = 3$

$f(11) = \sqrt{11-2} + 1 = \sqrt{9} + 1 = 4$



   b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_2^3 f(x)dx$. (3BE)

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \left(\sqrt{x-2} + 1\right)dx = \int_2^3 \left((x-2)^{\frac{1}{2}} + 1\right)dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}+1} + x\right]_2^3 =$$

$$\left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + x\right]_2^3 = \frac{2}{3}(3-2)^{\frac{3}{2}} + 3 - \left(\frac{2}{3}(2-2)^{\frac{3}{2}} + 2\right) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

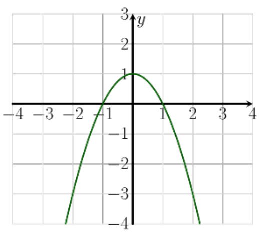
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

Lösungsvideo:

2. Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge $\mathbb{W}$ hat.

   a) $\mathbb{W} =]-\infty; 1]$ (2BE)

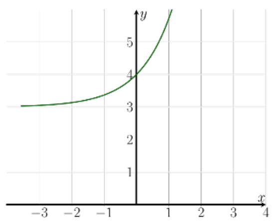
$f(x) = -x^2 + 1$



Lösungsvideo:

   b) $\mathbb{W} =]3; +\infty[$ (2BE)

$f(x) = e^x + 3$



Lösungsvideo:

3. a) Betrachtet werden eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion p und der Punkt $Q(2|p(2))$.

Beschreiben Sie, wie man rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von p im Punkt Q ermitteln kann. (2BE)

Für eine allgemeine Gerade gilt die Gleichung $y = m \cdot x + t$.

Die Steigung der Tangente, kann mit Hilfe der ersten Ableitung bestimmt werden.

Es gilt: $m_t = p'(2)$

Anschließend können die Koordinaten des Punktes Q in die Gleichung $y = p'(2) \cdot x + t$ eingesetzt werden, womit man noch die unbekannte t erhält.

Lösungsvideo:

b) Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto ax^2 + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, deren Graph im Punkt $N(1|0)$ die Tangente mit der Gleichung $y = -x + 1$ besitzt.

Bestimmen Sie a und c.

1. $h(1) = 0$

$a \cdot 1^2 + c = 0$

(I) $a + c = 0$

2. $m_t = -1$

$h'(x) = 2ax$

$h'(1) = -1$

(II) $2a \cdot 1 = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$

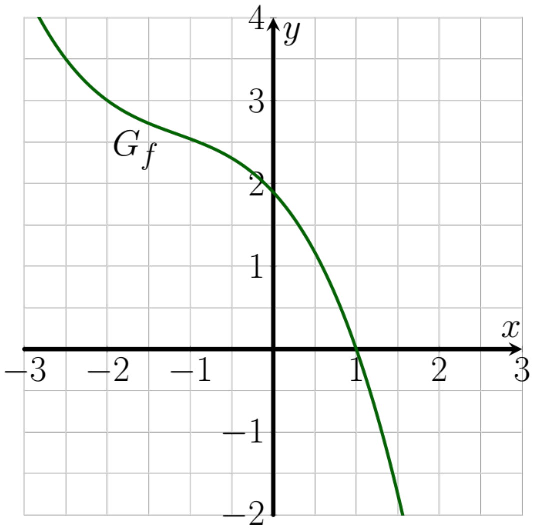
$\rightarrow c = -a = \frac{1}{2}$

$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

Lösungsvideo:

4. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f. G_f ist streng monoton fallend und schneidet die x-Achse im Punkt $(1|0)$.

Betrachtet wird fernen die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ und maximalem Definitionsbereich $\mathbb{D}_g$.



a) Begründen Sie, dass $x = 1$ nicht in $\mathbb{D}_g$ enthalten ist, und geben Sie den Funktionswert $g(-2)$ an. (2BE)

Für $x = 1$ gilt $f(x) = 0$ (bzw. $f(1) = 0$) und da man durch 0 nicht teilen darf, muss dieser Wert beim maximalen Definitionsbereich vom g ausgeschlossen werden.

$g(-2) = \frac{1}{f(-2)} = \frac{1}{3}$

Lösungsvideo:

b) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g. (3BE)

$g(x) = f(x)$

$\frac{1}{f(x)} = f(x) \qquad | \cdot f(x)$

$f(x)^2 = 1 \qquad | \sqrt{}$

$f(x) = \pm 1$

→ $x_1 \approx 0{,}6$; $x_2 \approx 1{,}3$;

Lösungsvideo:

Stochastik
Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2

Gegeben ist die Zufallsgröße X mit der Wertemenge $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch, d.h. es gilt
$P(X = 0) = P(X = 5), P(X = 1) = P(X = 4)$ und $P(X = 2) = P(X = 3)$.
Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitswerte $P(X \leq k)$ für $k \in \{0; 1; 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	1,00

a) Tragen Sie die fehlenden Werte in die Tabelle ein. (2BE)

$P(X = 0) = 0{,}05 = P(X = 5)$
$P(X = 1) = 0{,}15 = P(X = 4)$
$P(X = 2) = 0{,}30 = P(X = 3)$

Lösungsvideo:

b) Begründen Sie, dass X nicht binomialverteilt ist. (3BE)

$P_p^5(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 = (1-p)^5$
$P_p^5(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot p^5 \cdot (1-p)^0 = p^5$
$p^5 = (1-p)^5$
$p = 1 - p$
$2p = 1$
$\rightarrow p = \frac{1}{2}$
$P_{0,5}^5(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32} \neq 0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

Lösungsvideo:

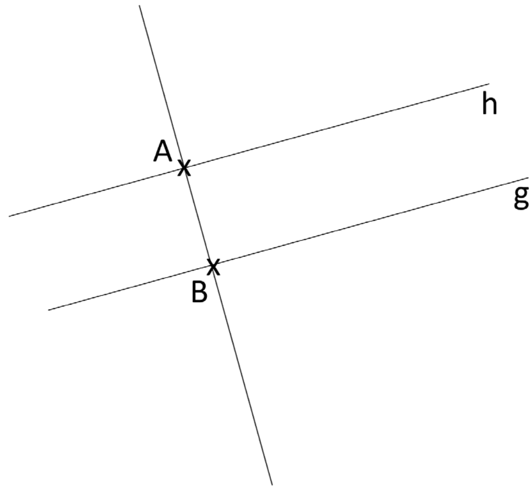
Geometrie
Aufgabengruppe 1

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, sowie eine weitere Gerade h, welche parallel zu g ist und durch den Punkt A(2|0|0) verläuft. Der Punkt B liegt auf g so, dass die Geraden AB und h senkrecht zueinander sind.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von B. (zur Kontrolle: B(-2|3|2)) (4BE)

h ist parallel zu g und verläuft durch A:

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1+3\lambda \\ 7+4\lambda \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (-1+3\lambda)\cdot 3 + (7+4\lambda)\cdot 4 + 2\cdot 0 &= 0 \\ -3 + 9\lambda + 28 + 16\lambda &= 0 \\ 25\lambda + 25 &= 0 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

Lösungsvideo:

$\rightarrow B(-2|3|2)$

b) Berechnen Sie den Abstand von g und h. (1BE)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$$

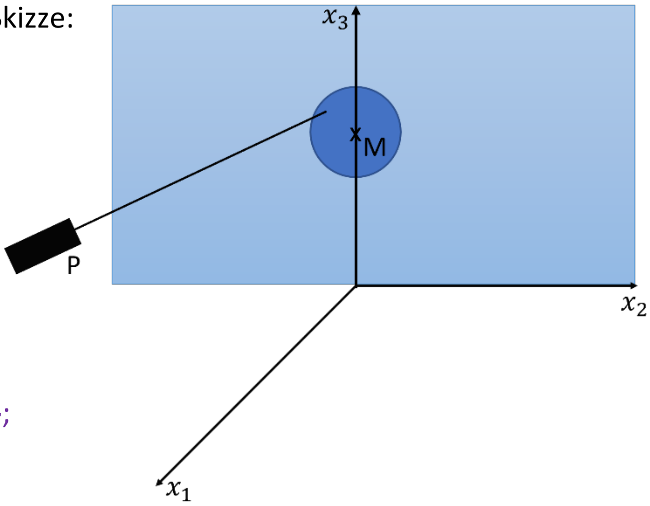
Lösungsvideo:

Geometrie
Aufgabengruppe 2

Mit einem Lasermessgerät soll ein Verkehrsschild angepeilt werden. Diese Situation wird modellhaft in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Ausgangspunkt des Laserstrahls wird durch den Punkt P(104|-42|10) beschrieben, seine Richtung durch den Vektor $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das Verkehrsschild wird durch eine Kreisscheibe repräsentiert, die in der x_2x_3-Ebene liegt und den Mittelpunkt M(0|0|20), sowie den Radius 3 hat.
Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl auf das Verkehrsschild trifft. (5BE)

Skizze:



$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$

$$104 - 13\lambda = 0$$
$$13\lambda = 104$$
$$\lambda = 8$$

NR: $10 \cdot 13 = 130; 9 \cdot 13 = 117; 8 \cdot 13 = 104;$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 104 \\ -42 \\ 10 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} = \sqrt{0^2 + (0-2)^2 + (20-18)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \leq 3$$

→ Der Laserstrahl trifft auf das Verkehrsschild.

Lösungsvideo: